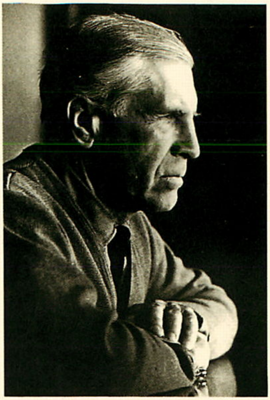


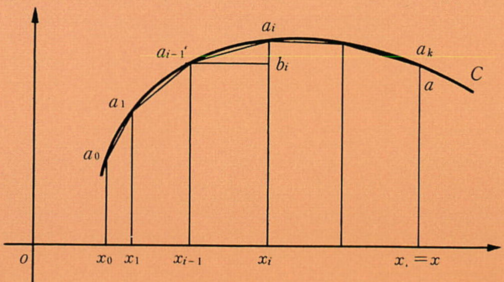
Л. С. ПОНТРЯГИН

無限小解析

複素変数からの新しいアプローチ

清原岑夫 訳

ポントリャーギン数学入門双書 2



森北出版株式会社

ポントリャーギン数学入門双書 2

無限小解析

—複素変数からの新しいアプローチ—

清原岑夫 訳

森北出版株式会社

Лев Семенович Понтрягин

ЗНАКОМСТВО С ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКОЙ

●

АНАЛИЗ ВЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

ポントリャーギンの『数学入門』双書

1988年に80年の生涯を終えたL. S. ポントリャーギンは，ソ連を代表する数学者のひとりであった．周知のように先年までアメリカとならぶ大国であったソ連は，過度の官僚制政治のために崩壊したが，ソ連における数学の盛んな研究は，世界における数学の進展のために大きく貢献した．位相アーベル群に関するポントリャーギンの双対定理は，今日の数学の基本定理のひとつとなっている．

晩年のポントリャーギンは，数学の啓蒙にも熱意を抱き，中等程度の数学の知識のみを前提とする『高等数学へのアプローチ』双書4冊を著した．わが国でも大学初年級で広く扱われている座標幾何，線形代数，微積分，微分方程式に関する親しみやすい形の本であるが，書き方は著者独自のものである．たとえば平面の2次曲線を主題とする座標幾何の本のあちこちに3次元空間の座標についても語り，複素数を考察して代数学の基本定理にも及ぶ．この定理の直観的な証明は，線形代数を主目標とする本にも述べられている．微積分の本は級数から始まり，実変数と複素変数ができるだけいっしょに扱われているから，むしろ複素関数論の本のようにも見える．微分方程式については，解の一意存在定理は線形の場合だけ証明して，一般の場合は証明なしに認め，それからの帰結や安定性，電子回路への応用などのことが論ぜられている．

この4冊と同様の筆致で同じころ同じ著者によって書かれた（やや程度の高い）『数概念の拡張』等を加えて『数学入門』双書とし，ここに邦訳出版されることとなった．

大体知られている内容であっても，書き方があまりに違うので，感動，挑戦とともに違和感を覚えられる読者もあるかもしれないが，これは巨匠の晩年の作である．われわれはここから多くの教訓をくみとるべきではなかろうか．

ロシア語に堪能で良心的な訳者諸氏によってこの訳業のなされたことを，読者とともに喜びたい．

1993年12月

彌永昌吉

ま え が き

この本は『高等数学の知識』という題名のシリーズの第2巻である．このシリーズはやや一般向きの小さな本4巻で構成され，全巻著者の手になるものである．第1巻『座標の方法』は1977年に刊行された（邦訳：『座標・線・面』）．この第2巻目の本は数学解析の基礎的な事項の説明に当てられる．

この本での説明は，可能ならばどこにおいても，実変数の場合も複素変数の場合も同時に考察する形で行われる．まず最初に，数列と級数，とくにべき級数の収束性の定義について説明する．微分係数の定義についても全く同じように実変数の関数に対しても複素変数の関数に対しても同時に定義が与えられる．なぜなら，形式的には微分係数の定義は両方とも同じだからである．原始関数の概念は実変数関数に対しても複素変数関数に対しても同時に定義される．原始関数は定数差を無視すれば一意的に定まることも同時に証明される．このような説明の方法によって，比較的容易にこの本の4章に複素変数の関数に関する理論の結果を含めることが可能になった．4章はこの本の最後の最も重要な章で，そこではローラン級数や特異点の近くでの関数のふるまいに関する比較的複雑な結果も述べられる．

ところで，いわゆる実変数関数の理論を形づくる解析学の諸問題は，ここではあまり興味のない問題と思うのであとの計画にまわすように努めることにした．このように，これらの問題は一緒に扱わなかったが，しかし必要性が生じたときはその場その場で説明してそれらを1つのところにまとめるようなことはしなかった．

さて，1章の中心の部分を占めているのは複素変数 z の関数 $\exp(z)$ の研究である．この関数はべき級数

$$\exp(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (1)$$

で与えられる．次のことが証明される．実数 $z = x$ のとき等式

$$\exp(x) = e^x$$

が成り立ち，純虚数 $z = iy$ に対して等式

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y$$

が成り立つ．したがって，微分法の計算を使わずに直接基本超越関数 e^x，$\cos y$，$\sin y$ のべき級数展開が得られる．

ここで注目しなければならないのは次の事情である．何か与えられた関数がべき級数に展開されることを証明するとき，このためには級数がある極限，つまり関数の値に収束することを証明すれば十分である．しかし，もし関数自身を級数によって定義しようとすれば（(*1*)参照)，そのためには級数が収束することを証明しなければならないし，そのためにコーシーの収束判定法を使ってきちんと数が定まることを証明しなければならない．このような仕組み全部について1章で述べられる．

2章は微分法の基本的な事項の説明に当てられる．まず第1に微分係数が実変数の関数と複素変数の関数に対して同時に定義され，微分の演算の逆演算として積分の概念が導入される．章の終りのところで積分形の剰余をもつテイラーの公式の証明が述べられる．

3章は積分法に当てられる．そこでは，積分は最初グラフによって囲まれた図形の面積として定義され，このように定義された積分は，グラフを与える関数の原始関数であることが証明される．さらに，明瞭にしかも丁寧に積分は積分和の極限として定義される．

以上が基本的にこの本の内容である．

「はじめに」は2つの部分に分けられる．第1の部分である簡単な概念を思い出してもらう．それは『座標の方法』から知ることができるものである．第2の「歴史上の参考事項」は数学解析の発展の歴史を非常に簡潔におおまかに述べたものである．ところで，この本を読むためには，中等学校の数学の課程を完全に終了している必要はない．この本で使われる初等数学の重要な公式は等比級数の和とニュートンの2項定理であるが，これらの証明は本の中で与えてある．したがって，この本は中等学校の上級生たちにも理解できると思われる．しかし，この本は簡単には読めないし，読むにはすぐれた数学的な教養が必要である．また，この本は集合の理論による“中毒”に対する解毒剤になりうることを期待している．最近，集合論的イデオロギーを中等学校のプログラムや教科書に浸透させることが熱心に考えられている．この立場の著者は，集

合論は科学技術の進歩のためには非常に重要で，数学の最新の成果であると主張している．実際は集合論は科学技術の進歩と何も共有しているものがないし，数学の最新の成果でもない．また，集合論的イデオロギーは，たとえば幾何学的図形の用語“相等”を用語“合同”によって置き換えたり，ベクトルを“空間の平行移動”として定義したりして，従来の概念を奇形的なものに導いている．

終りに，この本の執筆と編纂の際にいただいたテレスニン氏の援助に感謝を表明する．また同じように，出版社の正式の監修者ニキシン氏の多くの意見に対して，その非常によいところを利用させていただいたことと合わせて感謝を表明する．

目　　次

はじめに

ここではまず第1に，いくつかの数学的な事項について述べる．それらはこれから必要となる事項で，著者の別の本『座標の方法』で述べておいたものである．第2に，歴史上の参考事項，つまり数学解析の形成の歴史について完全な形ではないがごく簡単に述べておく．

平面上の直交座標

平面 P 上に直交する2直線をとり，o でその交点を表す．便宜上平面 P はこの紙面（図1）であると見なし，2直線の1つは水平線とし，もう1つは垂直線とする．水平線を**横軸**，垂直線を**縦軸**という．またこの2つの軸を単に**座標軸**といい，点 o を**座標の原点**という．

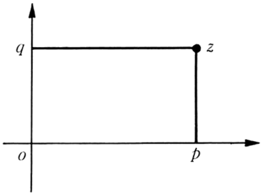


図1

さて，z を平面 P 上の点とする．座標軸を使ってこの点に2つの実数 x と y を対応させよう．x は点の横座標で，y は点の縦座標である．このために点 z から横軸上に垂線 zp を下し，縦軸上に垂線 zq を下す．点 p が座標の原点 o の右側にあるとき，x で線分 op の長さを表す．したがって正の数となる．点 p が座標の原点 o の左側にあるとき，x でマイナスの符号を付けた線分 op の長さを表す．したがって負の数となる．点 p が座標の原点と一致するとき，$x=0$ とする．同じように，点 q が座標の原点の上側にあるとき，y で線分 oq の長さを表す．したがって正の数となる．点 q が座標の原点の下側にあるとき，y でマイナスの符号を付けた線分 oq の長さを表す．したがって負の数となる．点 q が座標の原点と一致するとき，$y=0$ とする．このようにして，平面 P 上の各点 z に対し，導入された座標系によって実数の対 x と y が対応する．x が点の**横座標**で，y が点の**縦座標**である．このことを式で次のように書き表す．

$$z = (x,\ y) \tag{1}$$

実数の対 x と y を点 z の**座標**という．

2つの実数 x と y が任意に与えられたとき，平面 P 上に横座標 x，縦座標 y のただ1つの点 z を作図することは容易である．

点 z が横軸に沿って右から左へ移動するとき，z の横座標は増大する．したがって，横軸には左から右へ向かう向きが付けられているという．全く同じ意味で縦軸には下から上へ向かう向きが付けられている．

$z_1 = (x_1,\ y_1)$ と $z_2 = (x_2,\ y_2)$ はそれぞれ与えられた座標をもつ平面 P 上の2点とであるとする．点 z_1 と z_2 の距離を $l(z_1,\ z_2)$ で表すと，この距離は次の式で定義される．

$$l(z_1,\ z_2) = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2}$$

さて今度はベクトルについて考察することにしよう．ベクトルを用いると多くの式が座標を用いる場合よりもずっと簡潔に書き表される．

a と b を平面 P 上の2点とする．一定の方法で向きが付けられた線分 ab，たとえば a から b へ向かう向きが付けられた線分 ab は**ベクトル** ab であるという．点 a をベクトルの**始点**，点 b をベクトルの**終点**という．また，ベクトル ab は点 a から**引かれた**ベクトルともいう．c と d を平面 P 上のいま1つの2点とする．ベクトル ab がベクトル cd に**等しい**というのは，線分 ab と線分 cd が次の3条件を満たすことである．

1）長さが等しい．　2）平行である．　3）向きが同じである．

明らかに，各ベクトル ab に対して，そのベクトルに等しい座標の原点 o から引かれたベクトルが存在する．このベクトルの終点を z で表す．したがってベクトル ab とベクトル oz は等しい．ここでは原則として考察は座標の原点 o を始点とするベクトルに限ることにする．このようなベクトルは1つの文字で，すなわちベクトル oz は単に文字 z だけで表す．またそうすると，座標の原点から引かれたベクトルと平面 P 上の点の間に1対1の対応が付けられる．すなわち，ベクトル oz にこのベクトルの終点つまり点 z が対応する．

さて，2つのベクトルの和を定義しよう．平面 P 上の2つのベクトル z_1 と z_2 について考察しよう．z_1 と z_2 は点 o を始点とするベクトルの終点である（図2）．ベクトルの和 $z_1 + z_2$ を定義するために，点 z_1 からベクトル z_2 に等

しいベクトル z_1z_3 を引く．ベクトル oz_3，同じことであるがベクトル z_3 をベクトル z_1 と z_2 の**和**と定義する．すなわち

$$z_3 = z_1 + z_2$$

とする．和 $z_1 + z_2$ を構成するとき，ベクトル z_1 と z_2 の役割は同じではないが，容易に証明されるように

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

となる．また，ベクトルの減法は加法の逆算として定義される．

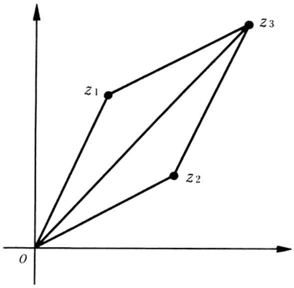


図 2

ベクトル全体の中に，点 o を始点と終点とする長さ 0 のベクトルが 1 つ存在する．このベクトルを 0 で表す．このベクトルは次の性質をもっている．すなわち $z + 0 = z$ である．

ベクトルを与える線分の長さはベクトルの**絶対値**とよばれ，次のような特別の記号で表される．

$$|z| = l(o,\ z)$$

ベクトルの絶対値について次の重要な不等式が成り立つ．

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2| \qquad (3)$$

この不等式は三角形 oz_1z_3 を考察することによって得られる（図 2 参照）．

ベクトルの加法と減法のほかにベクトルに対する重要な演算がもう 1 つ存在する．それはベクトルと数の乗法である．α を数とし，z をベクトルとするとき，α と z の積

$$z' = \alpha z$$

を定義するために，点 o と点 z を通る直線 L を引く．α が正の数の場合，直線 L 上で点 o から長さが $\alpha|z|$ に等しい線分 oz' を線分 oz と同じ側に引く．この線分の終点 z' がベクトル αz である．α が負の数の場合，点 o から直線 L 上で長さ $|\alpha||z|$ の線分 oz' を線分 oz の反対側に引く．この線分の終点 z' がベクトル αz である．$\alpha = 0$ の場合または $z = 0$ の場合，ベクトル αz は零ベクトルである．

今度はベクトルの座標の概念を導入しよう．z はここでは同時に点でありベクトルであるから，点 z の座標は同時にベクトル z の座標と見なすのは自然

なことである．したがって，次のように書き表すことができる．

$$z=(x,\ y)$$

ただし，z はベクトルで，x，y はその座標，つまり点 z の座標である．

さて，純粋に幾何学的に定義されたベクトルの演算を座標を用いて表してみよう．ベクトル z とは別に，ベクトルをもう 2 つ座標で表す．

$$z_1=(x_1,\ y_1),\quad z_2=(x_2,\ y_2)$$

このとき

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2) \tag{4}$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2,\ y_1-y_2) \tag{5}$$

$$|z|=+\sqrt{x^2+y^2} \tag{6}$$

$$\alpha z=(\alpha x,\ \alpha y) \tag{7}$$

これらの等式は容易に証明される．

極座標　さて，平面 P 上にはすでに直交座標系，つまり，横軸，縦軸，座標の原点が導入されている．この座標系と密接な関係にあるのがいわゆる**極座標系**である．$z=(x,\ y)$ を直交座標で与えられた平面 P 上の任意の点とする．ここでこの点 z に対して別の 2 つの実数 ρ と φ，つまり z の**極座標**を対応させよう．すなわち，ρ は線分 oz の長さに等しい数，$\rho=l(o,\ z)$ であり，φ は横軸の正の部分と線分 oz のなす角の大きさに等しい数である．ただし，角は時計の針の回転の向きと反対の向きに測るものとする（図 3）．極座標は次のように書き表す．

$$z=[\rho,\ \varphi]$$

実数 ρ を点 z の**動径**といい，実数 φ を点 z の**偏角**という．

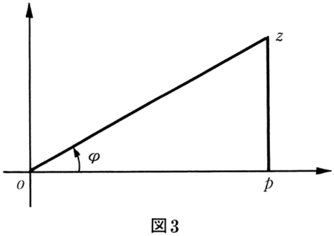


図 3

点 z の動径は一意的に定まる．偏角 φ は点 z が座標の原点と一致しているとき全く定まらない．また，点 z が座標の原点と一致していないとき，偏角 φ は一意的には定まらない．すなわち，φ が点 z の偏角ならば，$\varphi+4kd$ もまた点 z の偏角である．ただし，k は任意の整数で，d は直角の大きさである．

直交座標と極座標を同時に使う場合，両者の関係の問題はぜひ考えておく必要がある．点 $z = (x, y) = [\rho, \varphi]$ の直交座標と極座標の関係は次の式で与えられる（図3）．

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \tag{8}$$

つぎに，極座標を用いてベクトル $z_1 = [\rho_1, \varphi_1]$ と $z_2 = [\rho_2, \varphi_2]$ の**内積** $z_1 \cdot z_2$ を定義しよう．すなわち

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \rho_1 \rho_2 \cos \gamma \tag{9}$$

と定義する．ただし，γ はベクトル z_1 と z_2 のなす角である．また γ の符号は無視してよい．さて，直交座標と極座標の関係の式(8)を用いると

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{10}$$

が得られる．これは内積をベクトルの直交座標によって表した式である．

複素数の幾何学的表示　直交座標によって，点と数を結び付けることができる場合がもう1つある．すなわち，これを用いて複素数とその演算を幾何学的に表示することができるのである．

複素数は，よく知られているように，負の数の平方根は求められないことがわかった結果生まれてきた．つまり，新しい数 i が方程式

$$i^2 + 1 = 0$$

を満たす数として導入され，したがって

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

となり，さらに，**複素数** z が次の式によって定義された．

$$z = x + iy \tag{11}$$

ただし，x と y は普通の数で，それまで使うのが習慣になっていた数であるが，それからは複素数と区別して実数とよばれている．さて，複素数に対しても普通の演算，すなわち，加法と乗法ならびにその逆算つまり減法と除法が行える．どのような計算の場合でも，i^2 を -1 に置き換えると複素数に対する演算は実数に対して以前から行っているのと全く同じように自由に実行できる．

つぎに，複素数に対する演算を数学的にもっときちんと定義しよう．

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

は2つの複素数とする．このとき，これらの和は次の式で定義される．

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{12}$$

また2つの複素数 z_1 と z_2 の積は次の式で定義される.

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \qquad (13)$$

さて,(*11*)の形で書き表される複素数 z はその形自体から,すでに直交座標が導入されている平面 P 上の点と見るのに適している.複素数 $z = x + iy$ を座標 (x, y) をもつ点 z,あるいは同じことであるが座標 (x, y) をもつベクトル z,つまり $z = (x, y)$ として表示することは望まれることである.複素数 z がこのような点として書きこまれている平面 P を**複素数平面**という.

そうすると今度は

$$z = x + i0 = x$$

の形の複素数を**実数**とよぶのは合理的である.実数はすべて横軸上にあるから,複素数平面上の横軸を**実軸**という.また

$$z = 0 + iy = iy$$

の形の複素数を**純虚数**または単に**虚数**という.これらの数は縦軸上にある.したがって複素数平面の縦軸を**虚軸**という.複素数 $z = 0 + i0$ は座標の原点と一致している.また,実数 $+1$ と -1 は実軸上で0からそれぞれ右と左に距離1だけはなれたところにある.虚数 $+i$ と $-i$ は虚軸上で0からそれぞれ0の上方と下方に距離1だけはなれたところにある.

今度は,複素数を表示するために極座標を使ってみよう.式(*8*)によって

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

であるから,式(*11*)で定義された複素数 z は次の形で書き表される.

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (14)$$

複素数 z のこの表示は**極形式**とよばれている.負でない実数 ρ を複素数 z の**絶対値**といい,角 φ をその**偏角**という.ρ は複素数 z によって一意的に定まり,次のような特別な記号で表される.

$$|z| = \rho = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

しかしここでもう一度思い出してもらわなければならないのは次のことである.複素数 z の偏角 φ は一意的には定まらないこと,すなわち,$|z| = 0$ の場合は偏角は全く定まらないし,$|z| \neq 0$ で φ が z の偏角である場合は φ と並んで $\varphi + 4kd$ も偏角となることである.ただし,k は任意の整数である.

さて，式(*12*)と(*13*)を用いて複素数の加法と乗法の幾何学的な解釈を与えよう．

式(*4*)と(*12*)からわかるように，2つの複素数 z_1 と z_2 を加えるためにはそれらを表すベクトル z_1 と z_2 を加えればよい．そのとき得られるベクトルの和 $z_3 = z_1 + z_2$ が複素数の和 $z_1 + z_2$ を表す．また，ベクトルに対して加法演算と逆な演算の減法演算が存在するから，複素数に対しても加法演算と逆な演算の減法演算が存在する．さらに，複素数の加法の幾何学的な解釈から次の重要な不等式が導かれる．

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$$

つぎに，複素数 z_1 と z_2 の乗法の幾何学的な解釈を与えるために，これらの複素数とその積 w を極形式で表す．すなわち

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$z_1 z_2 = w = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi)$$

とおく．極形式で積を計算するとき，周知の三角法の公式を使う．そうすると，次の式が得られる．

$$\begin{aligned} w = z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &\quad + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

したがって

$$\sigma(\cos\psi + i\sin\psi) = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{15}$$

ゆえに

$$\sigma = \rho_1\rho_2, \quad \psi = \varphi_1 + \varphi_2 \tag{16}$$

これは複素数 z_1 と z_2 を掛けるとき，絶対値 ρ_1 と ρ_2 は掛けられ，偏角 φ_1 と φ_2 は加えられることを意味している．

また，(*16*)から明らかなように，1つの複素数を別の複素数で割る除法演算は，分母が0でなければいつも可能である．実際，w と z_1 は与えられた複素数で，方程式 $w = z_1 z_2$ から z_2 を求めなければならないとする．そうすると(*16*)から

$$\rho_2 = \frac{\sigma}{\rho_1}, \quad \varphi_2 = \psi - \varphi_1$$

が得られる．

積の式(15)は，この式をつぎつぎに適用することによって，有限個の複素数の場合に拡張することができる．すなわち

$$z_j = \rho_j(\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j), \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

は複素数の列で，$w = z_1 z_2 \cdots z_n$ とする．このとき次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} w &= \sigma(\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= \rho_1 \cdots \rho_n(\cos(\varphi_1 + \cdots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \cdots + \varphi_n)) \end{aligned}$$

ここで複素数 z_1，z_2，$\cdots$，z_n がすべて同じ1つの複素数 z に等しい特別の場合として，次の重要な公式が得られる．

$$z^n = \sigma(\cos \psi + i \sin \psi) = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \tag{17}$$

関数のグラフ　ある法則が存在して，数 z がわかるとこの法則によって数

$$w = f(z)$$

が計算できるとき，独立変数 z の関数 $f(z)$ が与えられたという．ここに，w と z は実数でも複素数でもよい．また，これらの数が両方とも実数の場合，普通これらの数は y と x で表される．関数 $y = f(x)$ が実変教の実数値関数である．この関数は，関数のグラフとよばれている座標平面上の曲線によって表すことができる．独立変数の各値 x に対して，座標平面上の横座標が x で縦座標が $f(x)$ の点

$$z = (x,\ f(x)) \tag{18}$$

が対応する．横座標 x が独立変数のすべての許容値の上を動くとき，点(18)は関数 $f(x)$ の**グラフ**とよばれている曲線を描くのである．

歴史上の参考事項

数学解析は，その基本概念となっているのは微分係数と積分の概念であるが，現在の形をとる前に，数世紀にわたる千年を経るといえるほどの非常に長い時の流れの中で形成され発展してきた．アルキメデス（前287～前212）の著作のいたるところで，今日積分や微分係数の概念の萌芽的な形と見なすことがで

きる構想がすでに現れている．アルキメデスは放物線と直線で囲まれた図形の面積を取り尽しの方法，すなわち，この図形に対し内接多角形の列をつくり，それによって図形の全面積を取り尽すという方法を用いて計算した．この構想は現代の視点から見れば，積分法の萌芽的な形であると考えることができる．なおここで，アルキメデスの取り尽しの方法には先駆者がいたということは指摘しておかなければならない．また，アルキメデスによって，ら線に接線を引くという構想が実行された．これは現代の視点から見れば，微分法，すなわち微分係数を求める算法の萌芽的な形であると考えることができる．

さて，微分法と積分法は，基本的な算法を含めた形で 17 世紀から 18 世紀の初めにかけてライプニッツ（1646～1716）とニュートン（1643～1727）によって創出された．ライプニッツとニュートンはほとんど同時に互いに全く独立にこの発見を成し遂げた．しかしかれら両人とも印刷物による発表を急がなかった．なぜなら，かれら自身は自分たちの得た結果について十分に明確な認識ができていなかったからである．かれらによって創出されたこの算法は都合よく機能し，応用上重要な信頼できる結果が得られたが，一方，算法がつくられただけでそれ以上の明確な理解はまだ得られていなかった．ここに神秘思想の入りこむ余地があったようである．当時，次のような見解が見られた．“まず行動せよ．確信はその後でやってくる．”問題は，速さ，すなわち時間に関する微分係数を定義するとき，一瞬の時間のような不可解な概念が使われていた点にある．この神秘的な一瞬の時間は完全に小さいもの，すなわちある計算の際には 0 で置き換えなければならないものであり，別の計算の際にはこのような置換えが許されないものであった．速さは，ある一瞬の時間に進んだ道のりのこの一瞬の時間に対する比として定義された．明らかにこの速さの記述の際に，一瞬の時間の長さは決して 0 に等しいと見なせなかった．なぜなら，速さが無意味な式 $\frac{0}{0}$ の形に書き表されることになるからである．しかし，速さを計算する場合，瞬間の継続時間を文字 O で表すならば，ニュートンがなしたように，この記号を用いて進んだ道のりを計算し，得られた結果の式で瞬間の長さを表す文字を 0 に置き換えなければならなかった．そうすると正しい結果が得られた．同じような困難はライプニッツの場合にも存在していた．これらの困難からの出口はコーシー（1789～1857）によって見出された．コーシーは極限

の概念を導入したのである．その本質は次の点にある．まず考察する時間の切片は一瞬の時間と見なさないで，完全に有限の大きさの量と考える．この有限の時間に進む道のりの時間の切片に対す比をつくり，得られた式で時間の切片を0に収束するように変化させ始める．このとき得られた比がどのような極限に収束するかを観察する．この極限が速さ，すなわち微分係数である．

微分法と積分法がある程度発展すると，もう1つ新しい概念が生まれてきて，非常に重要な役割を果たすことになった．それは無限級数，すなわち無限個の数の和で，次の形の式で書き表される．

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{19}$$

この無限和を用いるとしばしば正しい結果が得られたが，ときには間違った結果になることもあった．そうすると，どのような条件の下で無限和は安心して用いることができるか，また無限和の値とは何であるか，このことを理解する必要がある．ところで，困難を引き起した具体的な無限和として次の例をあげることができる．

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{20}$$

この和を，普通の和に対して用いられている方法で扱うならば，項をグループに分けることができる．つまり，奇数番目の各項をその直後の偶数番目の項に加えることができる．この各対の和は0であるから，これらの項を加えた結果として，和(*20*)は0になる．しかし一方，第1項，つまり1を別にし，偶数番目の項と奇数番目の項をグループ分けし，これらの組合せの項の和は0になるようにすると，和(*20*)は1に等しいことがわかる．また，和(*20*)が1/2に等しくなるという視点も存在する．次のように考えるとこの結果に達することができる．和(*20*)は存在して s に等しいとすると，明らかに等式 $s = 1 - s$ が成り立つ．これから $s = 1/2$ が得られる．さて，無限級数のこの問題もまたコーシーによって解決された．かれは，どんな条件の下で和(*19*)を考察することができ，その値は何に等しくなるのか，ということをきちんと定義をしたのである．すなわちまず

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

とおいて部分和をつくった．そうすると部分和の無限列

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots$$

が得られる．この数列がある極限 s に収束するとき，級数(*19*)は収束すると

見なし，その和は s に等しいと見なした．

級数が数学解析で果たす役割をとくに強調しているのは，テイラー級数である．テイラー級数はテイラー（1685～1731）によってニュートンの差分公式から得られたものである．テイラー級数の非常に大きな意義は，その当時考察されていたすべての関数はテイラー級数の形で書き表すことができたという点にあった．したがって，ある時期には任意の関数はどんな場合でも部分ごとにテイラー級数によって表すことができるという考えが起こった．しかし，この考えはその後完全に論破されてしまった．

ところで，解析学における新しい方向が複素変数の複素関数の考察と結び付いて起こった．この関数の研究の際に，不明確なことが沢山生じてきた．しかし，オイラー（1707～1783）やガウス（1777～1855）のような偉大な数学者の参加によって，しだいに資料が蓄積され，やがてこれらの資料の蓄積が複素変数の関数の理論，同じことであるが解析関数の理論の建設に導いていった．この分野での決定的な結果は，コーシーによるものである．かれは次のことを証明した．すなわち，閉曲線の内部において考察されている関数の不連続点や特異点がなければ，複素変数の複素数値関数の閉曲線上の積分は 0 に等しい．この特筆すべき定理を述べるとき，コーシーは，考えている関数は微分係数をもちそれが連続でなければならないことに気がついていなかった．しかし，この仮定は自分の証明では用いていた．このような落ち度は誤りであるとかりにもいうのはむずかしい．当時は，関数の微分可能性は改めていう価値がないほど自然な仮定であるか，あるいはまたすべての連続関数は微分可能であると思っているかどちらかであったからである．さらに，この定理からコーシーは，複素変数の関数の値は閉曲線上の積分によって表すことができるというコーシーの積分公式を導いた．これらの結果によってコーシーは複素変数の関数論の基礎を築いたのである．その理論は現代解析において大きな役割を果たし，また多くの応用がある．

1章
級　　数

数学でしばしば考察しなければならないのは，無限個の数の和，いわゆる**無限級数**である．このような無限和あるいは級数は次の形で書き表される．

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \qquad (1)$$

ただし，z_1，z_2，…，z_n，…は実数または複素数である．初等代数においてこのような級数の特別な1つの場合が考察されている．それは減小等比数列を項とする級数で，次の形で書き表される．

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

ただし，$|q| < 1$である．この等比級数については，和を求めることができて，和は

$$\frac{a}{1-q}$$

に等しい．そこで一般の形の級数(1)について，どのような条件の下で和を求めることができるか，という問題が起こってくる．この問題は簡単であるといえないことを示しているのが次の例である．級数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \qquad (2)$$

について検討してみよう．もし級数に対して普通の有限和の場合のように演算をほどこしてよいのであれば，まず，級数の有限個の項の組合せをつくり，組み合わせた項の和を求め，その後で，これらの和を全部加えることができる．したがって，(2)について，まず，奇数番目の項とその次の偶数番目の項の和を求め，その後で，これらの和を全部加えることができる．ところが，このように組み合わせた項の和はどれも0である．したがって，(2)の和は0である．一方，まず，(2)の第1項を除いて，偶数番目の項とその次の奇数番目の項の

和を求めると，これらの和はすべて0であるから，(2)の第1項だけが残る．したがって(2)の和は1である．このことから，無限級数を全く自由に有限和のように扱うことは不可能であることがわかる．だからまず第一に必要なのは，級数(1)の和というものをどのように理解しなければならはないのか，この和を正確に定義することである．級数の和をきちんと定義するために，いわゆる級数の部分和 s_n をつくる．すなわち

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

とおく．和 s_n は番号 n に依存し，しかも s_n について n が限りなく大きくなるときの行動を調べることができる．n がこのように変化するとき，s_n が s に近づくならば，級数(1)は求和可能で，その和は s に等しいと定義されるのである．そしてこのような級数は**収束する**という．しかし，収束級数には普通の有限和には見られない奇妙な性質があることがわかっている．たとえば，収束級数(1)において項の順序を適当に変えると，新たに得られた級数の和が元の級数の和と違ってくることがある．いろいろのこのような奇妙な性質から逃れるために，収束級数の中から絶対収束級数とよばれているものを取り出す．すなわち，(1)が**絶対収束**するというのは，項の絶対値を項とする級数が収束すること，つまり級数

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots$$

が収束することである．すると，絶対収束級数の和は項の順序にも依存せず，絶対収束級数は有限和の掛け算と同じ規則で掛け算することができる．したがって，絶対収束級数に対して全く自由に計算することができ，それによって正しい結果が得られるのである．

級数は，級数を用いて数学の重要な定数を計算することができるという点においても重要である．たとえば次の公式は有名である．

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots \tag{3}$$

この(3)を用いると，π の値を任意の精度で計算することができる．しかし，この公式は π の計算法として最良のものではないということは指摘しておかなければならない．なぜなら，(3)の収束は非常に遅いからである．

またこれに劣らず重要なのは，級数による関数の計算である．級数(1)の項が実変数または複素変数 z の関数のとき，級数が収束すればその和によって

1つの関数 $f(z)$ が定められる．すなわち

$$f(z) = z_1(z) + z_2(z) + \cdots + z_n(z) + \cdots \tag{4}$$

が得られる．

ここで次の2つの場合の本質的な違いを見分けておかなければならない．第1は，何らかの理由ですでにわかっている関数 $f(z)$ を級数(4)によって展開する場合である．このとき，この級数は既知の関数を計算するのに役立つ．

第2は，関数 $f(z)$ 自身を級数(4)で定義する場合である．このとき，関数の定義式(4)に基づいて関数 $f(z)$ の重要な性質をいろいろ研究することができる．

変数 z の関数を項とする級数の特別の場合として重要なのは，いわゆる**べき級数**，すなわち次の形の級数である．

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{5}$$

ただし，係数 a_0，a_1，…，a_n，…は実数または複素数である．さて，数学において重要な役割を果たしている関数は，その多くはべき級数によって定義されており，したがって(5)の形の式で書き表されている．一方，関数はすべてべき級数によって，全体においてでなければ局所的に表すことができるという予想が存在していた．しかしこの予想は完全に正しいといえないことがすでにわかっている．

この章の最後の節で，複素変数 z に対して(5)の形の級数で表される関数を詳細に研究する．そこで示される最も興味深い性質は次のとおりである．明らかに級数(5)は $z=0$ のとき収束する．級数はこの $z=0$ のときだけ収束するということもある．この自明な場合を除き，ある $z \neq 0$ に対して収束する級数について考える．そのとき，この級数に対していわゆる収束半径 $r > 0$ が定まる．すなわち，$|z| < r$ なるすべての z に対して(5)は収束し，しかも絶対収束し，$|z| > r$ なるすべての z に対して(5)は発散する．したがって，関数 $f(z)$ は $|z| < r$ なるすべての z に対して級数(5)によって定められる．$r = \infty$ の場合も除かれない．$r = \infty$ ならば，(5)は z のすべての値に対して収束し，複素変数 z の全平面上で関数 $f(z)$ が定義される．

7節で，解析学において非常に重要な1つのべき級数で与えられる関数について考察し研究する．それは複素変数 z の指数関数 $\exp(z)$ で，次の級数で定義される．

$$\exp(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (6)$$

この級数は z のすべての値に対して収束する．したがって，関数 $\exp(z)$ は複素変数 z の全平面上で定義される．7 節でのこの関数の研究に基づいて，2 つの重要な性質が証明される．実数 $z = x$ のとき，等式

$$\exp(x) = e^x \qquad (7)$$

が成り立つ．また，純虚数 $z = iy$ のとき，等式

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y \qquad (8)$$

が成り立つ．さらに，(6)，(7) と (8) から直ちに基本的な実変数の超越関数 e^x，$\cos y$，$\sin y$ のべき級数展開が得られる．

さて，関数 $f(z)$ をべき級数に展開するとき，問題への 2 つの違った接近法に出会う．第 1 の接近法では，はじめに，何らかの方法で与えられた関数 $f(z)$ があり，後で，これがべき級数に展開されることを証明する．これを証明するには，与えられた z の値に対してべき級数が関数値 $f(z)$ に収束することを証明しなければならない．また，第 2 の接近法では，はじめに関数 $f(z)$ をべき級数で定義する．その際，定義が意味をもつことを証明するためには，べき級数が収束することをまず証明しなければならない．また，第 2 の接近法の場合，収束の判定法を使用しなければならないし，実数とは何か，ということについて十分明確に理解していなければならない．これらのたいへん微妙な問題の説明は 1 章の 1 節で行うことにする．

1. 収　束　列

収束する数列は数学においてたいへん重要な役割を果たしている．

実数列

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \qquad (1)$$

が s に**収束**する，あるいは，極限 s をもつというのは，番号 n が大きくなるとき，s_n が s に限りなく近づくことである．このとき

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \qquad (2)$$

と書く．$s = 0$ の場合，すなわち数列 (1) が 0 に収束するとき，自然数 n の関数 s_n を**無限小**という．この場合，s_n は限りなく減小するというほうがより的

確かもしれない．というのは，n が大きくなるとき s_n が 0 に近づく過程が問題だからである．

明らかに，等式(2)は次の(3)と同値である．

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - s) = 0 \tag{3}$$

実際，数列(1)が s に収束するのは数列

$$s_1' = s_1 - s,\ s_2' = s_2 - s,\ \cdots,\ s_n' = s_n - s,\ \cdots$$

が 0 に収束するときしかもそのときだけである．さて，等式(3)が成り立つならば，s_n' は無限小である．したがって，収束の過程の研究は相当程度無限小の研究に還元されよう．

無限小数　収束の過程を例でわかりやすく説明するために，算術でよく知られている無限小数をとりあげることにしよう．

次の無限小数を考える．

$$0.999\cdots \tag{4}$$

ここでは，0 と小数点の後に 9 が無限個続いて並んでいる．算術でよく知られているように，この無限小数は 1 に等しい．この命題の数学的に正確な意味は次の数列を考察することによってはっきりする．

$$s_1 = 0.9,\ s_2 = 0.99,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \tag{5}$$

ここで s_n は有限小数で，0 と小数点の後にちょうど n 個の 9 が並んでいる．簡単な計算からわかるように，数列(5)に対して

$$s_n' = s_n - 1 = -\frac{1}{10^n}$$

となる．これを小数で表すことによって，$-\dfrac{1}{10^n}$ は無限小であることが容易に示される．これは数列(5)が 1 に収束することを意味している．

もう 1 つの例として次の無限小数を検討しよう．

$$0.333\cdots \tag{6}$$

ここでは，0 と小数点の後に 3 が無限個続いて並んでいる．この無限小数は，分数 $\dfrac{1}{3}$ を割り算によって小数に直すときに得られる．この割り算の過程で，次の数列が得られる．

$$s_1 = 0.3,\ s_2 = 0.33,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \tag{7}$$

ここで s_n は有限小数で，0と小数点の後に3がちょうど n 個並んでいる．

簡単な計算からわかるように，数列(7)に対して

$$s_n' = s_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3 \cdot 10^n}$$

となる．$s_n' = -\dfrac{1}{3 \cdot 10^n}$ は明らかに無限小である．ゆえに，数列(7)は $\dfrac{1}{3}$ に収束する．無限小数(6)が分数 $\dfrac{1}{3}$ に等しいということの正確な意味は，このように s_n' が無限小であるということである．

いま考察した2つの無限小数は全く具体的なもので，しかも循環小数であった．今度は，無限小数を一般的な形で考察しよう．無限小数を次のように書く．

$$0.f_1f_2f_3\cdots \qquad (8)$$

ここでは，0と小数点の後に数字 f_1，f_2，f_3，…が並んでいる．ただし，これらの各数字の値は0から9までのいずれかの数字である．無限小数(8)に対応する有限小数の列をつくる．

$$s_1 = 0.f_1,\ s_2 = 0.f_1f_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \qquad (9)$$

ここで，s_n は有限小数で，0と小数点の後に数字 f_1，f_2，…，f_n が並んでいる．よく知られているように，無限小数(8)が循環小数ならば，数列(9)は有理数 s に収束し，

$$|s_n'| = |s_n - s| \leqq \frac{1}{10^n}$$

となる．したがって，s_n' は無限小である．無限小数(8)が有理数 s に等しいということの意味は，s_n' が無限小であるということである．ところが，無限小数(8)が循環小数でないならば，数列(9)の極限となるような有理数は存在しない．したがって，この場合，無限小数(8)は数と見なすことができるかどうかという問題を提起しなければならない．明らかに，このような数の必要性が存在している．幾何学で，長さが非循環無限小数で表される曲線に出会っている．その例として次のものがあげられよう．1)直角をはさむ2辺の長さがどちらも1の直角三角形の斜辺の長さ．この長さはいまは $\sqrt{2}$ で表されている．2)直径が1の円周の長さ．これは π で表されている．平方根の普通の求め方で $\sqrt{2}$ の値を計算すると，(8)の形の非循環無限小数が得られる．しかも数列(9)は自然な意味で $\sqrt{2}$ に収束する．すなわち

$$s_1^2, \ s_2^2, \ \cdots, \ s_n^2, \ \cdots$$

が2に収束する．

同様のことが π についてもいえる．これら2つの例で，幾何学からの要求は有理数だけでは満たされないことが示されている．だから，有理数でない数の存在を認めることが必要である．このような数は無理数とよばれている．数学に必要な無理数は，もちろん上の2例以外にも沢山ある．そこで，数学に必要なすべての数を記述する問題が起こってくる．この問題を解く鍵となるのが収束する数列の研究である．この立場から数列の過程の研究を3節で行うことにする．

収束性の定義　これまでの説明で，収束とは何かということについて直観的なイメージが得られた．ここで正式に一般的に受けいれられている定義を述べよう．

定義　実数列

$$s_1, \ s_2, \ \cdots, \ s_n, \ \cdots \tag{10}$$

が s に**収束**するというのは，任意の正の数 ε に対して，適当な自然数 ν を見つけて，$n > \nu$ ならば不等式

$$|s_n - s| < \varepsilon \tag{11}$$

が成り立つことである．なお，ここで ν は ε に依存して定まることに注意しておく．

この収束の過程を理解しやすくするために，収束の過程を幾何学的に解釈してみよう．数列(10)の各 s_n を，横軸上の座標 s_n の点 s_n として幾何学的に表す．s についても同じように扱う．すなわち，s に対して座標 s の点 s を対応する点とする．横軸上の点 x で不等式

$$|x - s| < \varepsilon \tag{12}$$

を満たすもの全体の集合を U_ε で表す．ここで，x は点だけでなくその点の座標をも表すものとする．区間 U_ε を点 s の **ε-近傍**という．さて，収束の定義から直ちに次の命題が得られる．点列(10)が点 s に収束するのは，任意の正の数 ε に対して近傍 U_ε がこの点列のたかだか有限個の点を除くすべての点を含むときしかもそのときだけである．

この命題の証明はむずかしくないので，ここでは略すことにする．なお，比喩的にいうと，点列(10)が s に収束するとは，点列(10)の主要な大部分の点

は点 s の近くにぎっしり詰まるように集まっていることである，ということができよう．

先に考察した 2 つの無限小数(*4*)と(*6*)の例では，s_1，s_2，s_3，…は増加の順に並んでおり，これらの項はすべて s より小さい．しかしいつもそうであるとは限らない．数列(*10*)の項は部分的に s より小さいことも大きいこともあるし，s 自身に一致することもある．また，数列(*10*)の異なる番号の項が互いに等しくなることもある．極端な場合として，数列(*10*)のすべての項が互いに等しくなることもある．しかし，どのような場合であっても，定義により，収束の条件さえ満たされてさえいれば(*10*)は s に収束するというのである．

複素数列の場合　これまでは実数列の収束について述べてきた．しかし複素数列の収束の問題もまた重要である．けれども，複素数列の場合，実数列の場合に完全に還元されるので，原理的には何も新しいものがない．

複素数列の場合に移り，複素数列を

$$r_1 = s_1 + it_1,\ r_2 = s_2 + it_2,\ \cdots,\ r_n = s_n + it_n,\ \cdots \tag{13}$$

とする．複素数列(*13*)が複素数 $r = s + it$ に収束する，あるいは極限 r をもつというのは，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r = s + it \tag{14}$$

であるというのは，実数列

$$|r_1 - r|,\ |r_2 - r|,\ \cdots,\ |r_n - r|,\ \cdots$$

が 0 に収束すること，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} |r_n - r| = 0 \tag{15}$$

となることである，と定義する．したがって，(*14*)と(*15*)は同等である．

ここで注意しておきたいのは，複素数列(*13*)の収束の定義は，この数列のすべての項が実数の場合，実数列に対して述べた定義と一致するということである．

数列(*13*)の極限 r が 0 のとき，自然数 n の関数 r_n は無限小である，あるいは，限りなく減小するという．明らかに，(*14*)が成り立つのは，

$$r_n' = r_n - r$$

が無限小になるときしかもそのときだけである．

また次のことに注意をしておこう．(*14*)は

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \quad \lim_{n\to\infty} t_n = t$$

が同時に成り立つことと同等である．この証明はむずかしくないのでここでは略することにする．さて，複素数列(*13*)の収束に関する問題を幾何学的にわかりやすく扱うために，この数列の各項と r を複素数平面 P 上の点で表す．複素数平面 P 上の中心 r 半径 ε の円を U_ε $(\varepsilon > 0)$ とする．すなわち，P 上の点 z で条件

$$|z - r| < \varepsilon \tag{16}$$

を満たすもの全体の集合を U_ε とする．U_ε を P 上の点 r の ε-近傍という．明らかに，数列(*13*)が収束するのは，任意の正の数 ε に対して，点列(*13*)の点は，たかだか有限個の点を除いて，すべて近傍 U_ε に含まれるときしかもそのときだけである．

部分列　実数列または複素数列

$$r_1, \ r_2, \ \cdots, \ r_n, \ \cdots \tag{17}$$

から項の一部分を取り出し，それらを，数列(*17*)の中での順序と同じ順序で並べると，1つの新しい数列が得られる．この数列を元の数列(*17*)の**部分列**という．この部分列を次のように書くことにしよう．

$$r_{n_1}, \ r_{n_2}, \ \cdots, \ r_{n_k}, \ \cdots \tag{18}$$

ここで，番号

$$n_1, \ n_2, \ \cdots, \ n_k, \ \cdots$$

は増加の順で並べられた自然数列である．また，しばしば部分列(*18*)の項を新しい番号を付けた新しい文字で表すことが必要になる．このためには，たとえば

$$r_1' = r_{n_1}, \ r_2' = r_{n_2}, \ \cdots, \ r_k' = r_{n_k}, \ \cdots$$

とおく．

明らかに，元の数列(*17*)が r に収束すれば，その部分列(*18*)もまた r に収束する．したがって

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r$$

から

$$\lim_{k\to\infty} r_{n_k} = \lim_{k\to\infty} r_k' = r$$

が得られる．ところで，数列について次のような事情がしばしば見られる．数列(*17*)は収束しないが，適当な収束する部分列を取り出すことができる．このことは後でたいへん重要な役割を演じることになる．

極限の基本規則　ここでまず無限小の簡単な性質をいくつかあげておく．また，実数列は複素数列の特別の場合であることを念頭において，複素数列の場合について述べることにする．複素数列を

$$c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n,\ \cdots$$

とする．この数列が有界であるとは，適当な正の数 c が存在して，任意の n に対して

$$|c_n| \leqq c \tag{19}$$

が成り立つことである．さて，(*19*)が成り立ち，r_n が無限小ならば，つまり

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

ならば，$c_n r_n$ もまた無限小である．すなわち

$$\lim_{n\to\infty} c_n r_n = 0$$

である．この証明はむずかしいことは何もない．もう1つ次のことを指摘しておこう．2つの無限小の和も差もまた無限小である．

これらの無限小の簡単な性質を用いて，極限の5つの基本規則を証明することができる．

2つの複素数列を

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots \tag{20}$$

$$w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n,\ \cdots \tag{21}$$

とする．(*20*)と(*21*)はそれぞれ z と w に収束すると仮定する．すなわち

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = w \tag{22}$$

とする．

規則 1

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = z + w$$

すなわち，和の極限は極限の和に等しい．

規則 2

$$\lim_{n\to\infty} (z_n - w_n) = z - w$$

すなわち，差の極限は極限の差に等しい．

規則 3

$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = zw$$

すなわち，積の極限は極限の積に等しい．

規則 4　　$w \neq 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w} \tag{23}$$

すなわち，商の極限は極限の商に等しい．

規則 5　　z_n と w_n は実数で，しかも

$$z_n \leqq w_n \tag{24}$$

を満たすならば，$z \leqq w$ である．すなわち，“小さいか等しい”の関係は極限に移行する．ただし，ここで強調しておかなければならないのは，不等式 $z_n < w_n$ から不等式 $z < w$ が得られないということである．

これらの規則の証明はむずかしくない．その中で最も複雑なのは規則 4 と 5 の証明で，ここではその証明だけを述べておく．

次のようにおく．

$$z_n = z + \hat{z}_n, \quad w_n = w + \hat{w}_n \tag{25}$$

ここで $\hat{z}_n$ と $\hat{w}_n$ は無限小である．差

$$\frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w} \tag{26}$$

をつくる．第 1 項の分数の z_n と w_n を(25)の式で置き換える．そうすると

$$\frac{z + \hat{z}_n}{w + \hat{w}_n} - \frac{z}{w} = \frac{zw + \hat{z}_n w - zw - z\hat{w}_n}{(w + \hat{w}_n)w} = \frac{\hat{z}_n w - z\hat{w}_n}{(w + \hat{w}_n)w}$$

が得られる．最後の分数の分子は無限小で，$\dfrac{1}{(w + \hat{w}_n)w}$ は，$w \neq 0$ であるから十分大きい n に対して有界である．ゆえに，(26)の差は無限小である．これで(23)が証明された．

規則 5 の証明に移ろう．(25)を用いて不等式(24)を次のように書き換える．

$$w_n - z_n = (w + \hat{w}_n) - (z + \hat{z}_n) \geqq 0$$

これを書きなおすと

$$(w - z) + (\hat{w}_n - \hat{z}_n) \geqq 0 \tag{27}$$

となる．$\widehat{w}_n - \widehat{z}_n$ は無限小であるから，(27) より，$w - z$ は負になりえないことがわかる．実際，$w - z$ が負になったとすれば，$\widehat{w}_n - \widehat{z}_n$ が無限小であることから，十分大きい n に対して $w_n - z_n$ は負になる．

以下の例の中で後で使う概念をいくつか定義する．しかしそれらの概念の研究は，それが後で引用されるまでとくに必要がないので，やらないでおくことにする．

例 1　関数の概念はいまでは学校の数学で扱われている．

ここで，関数について思い出しておこう．変数 w が変数 z の関数であるというのは，それを $w = f(z)$ の形の式で書き表すが，z に数値が与えられたとき，その値に対応して w の数値 $w = f(z)$ が定められることである．関数の例として多項式関数 $w = f(z) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_k$ があげられる．ここに，k は自然数である．さて，解析学において非常に大きな役割を果たしているのは，いわゆる連続関数である．解析学の本ではふつう連続関数に対して多くの紙幅が割り当てられている．しかしここでは，連続関数に対して特別扱いすることはやめにして，この例の中で，実変数と複素変数の場合に分けずに連続関数の定義を与えることにする．

定義　関数 $f(z)$ が変数 z の**値** $z = z_0$ **で連続**であるというのは，変数 z の値からなる数列

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots$$

に対して

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \tag{28}$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0) \tag{29}$$

となることである．また，関数 $f(z)$ が**連続**であるとは，$f(z)$ が変数 z のすべての値で連続なことである．

極限の規則 1 〜 4 からわかるように，$f(z)$ と $g(z)$ が $z = z_0$ で連続ならば，

$$f(z) + g(z),\quad f(z) - g(z),\quad f(z)g(z),\quad \frac{f(z)}{g(z)} \tag{30}$$

はいずれも $z = z_0$ で連続である．ただし，最後の関数については $g(z_0) \neq 0$ とする．また，関数の積の連続性から，連続関数 $f(z)$ の累乗 $(f(z))^k$ は連続で

ある．ただし，k は自然数である．

さて，$f(z)=z$，$f(z)=c$（c は定数）は明らかに連続であるから，いま述べたことによって，多項式関数

$$\varphi(z)=a_0z^k+a_1z^{k-1}+\cdots+a_k$$

は連続関数である．さらに，$\psi(z)$ をもう1つの多項式関数とすれば，$\psi(z_0)\neq 0$ なる z_0 に対して，$\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ は $z=z_0$ で連続である．

例2　飛躍をもつ関数すなわち不連続関数の例をあげよう．

実変数 x の実数値関数 $f(x)$ を次の条件によって定義する．

$$x>0 \text{ のとき}\quad f(x)=1 \tag{31}$$
$$x<0 \text{ のとき}\quad f(x)=-1$$

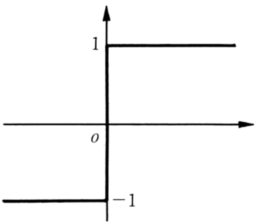


図4

（この関数のグラフについては図4を見よ．）この条件の下では $f(x)$ は $x=0$ で定義されていない．いま，$f(x)$ を正の数と負の数だけに対して定義された関数で，$x=0$ に対しては定義されていない関数，すなわち $x=0$ を変数 x の値からはずした関数と見なすならば，連続性の定義から，$f(x)$ は連続なことがわかる．このことは容易に確かめられる．そこで，次の問題が生じる．関数 $f(x)$ に対して，$x=0$ のときの $f(x)$ の値つまり $f(0)$ を上手に定義して得られる，すべての実数 x に対して定義された関数が連続になるようにできるか．容易にわかるように，このようなことはできない．実際，x_1，x_2，…，x_n，…を0に収束する正の数の列とする．このとき，$f(x_n)=1$ で連続性の定義から $f(0)=1$ となる．全く同様にして，0に収束する負の数の列，x_1，x_2，…，x_n，…を用いて $f(0)=-1$ が得られる．したがって，$f(x)$（(31)参照）を $x=0$ に対して定義し，新たに得られた関数が連続になるようにすることはできない．

今度は，実変数 x の実数値関数 $\sin\dfrac{1}{x}$ を検討しよう．この関数も先の関数と同じように x の値が正の数と負の数のときだけ定義されている．しかし，この関数も，$x=0$ に対し定義をし，新たに得られた関数がすべての実数 x に対して定義された関数として連続になるようにはできない．このことを納得

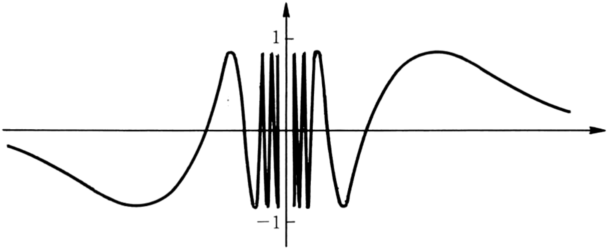


図5

するには関数 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ のグラフ（図5）を思い浮かべてみればよい．

例3　ここでは，複素数について述べる場合，複素数を複素数平面 P 上の点と同一視することにする．すでに述べたように（(*16*)参照)，P 上の点 r の ε-近傍とは，あるいは同じことであるが，半径 ε の近傍とは，P 上の点 z で，不等式

$$|z - r| < \varepsilon$$

を満たすもの全体の集合 U_ε のことである．ただし，ε は正の数である．したがって，近傍 U_ε は点 r を中心とする半径が r の円である．ただし，境界上の点は除く．また，M を複素数平面 P 上の無限集合とする．このとき，点 r が集合 M の**集積点**であるというのは，r のどの近傍も M の点を無限個含むことである．さて，集合 M の点がすべて実数ならば，明らかに，M の集積点 r もまた実数である．実際，$r = s + it$ で，$t \neq 0$ ならば，r の近傍 $U_{|t|}$ は明らかに実数を含まない．したがって，r は複素数平面 P の実軸上の集合 M の集積点にはなりえない．

今度は次のことを証明しよう．r が集合 M の集積点ならば，M の中から r に収束する点列

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots \tag{32}$$

で，互いに異なる点からなる部分列をもつものを取り出すことができる．点列(*32*)を求めるために，n を任意の自然数とし，$U_{\frac{1}{n}}$ を r の半径 $\dfrac{1}{n}$ の近傍とする．$U_{\frac{1}{n}}$ から r と異なる M の点 r_n をとる．このようにして取り出した点列(*32*)は r に収束する．

最後に，集合 M が**閉集合**であるというのは，M のすべての集積点が M 自身に含まれることである．たとえば，不等式 $a \leqq x \leqq b$ を満たすすべての x からなる集合は閉集合である．

2．無　限　小

1節で数列

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots$$

が r に収束するということは何を意味しているのかが明らかにされた．さらにこのことは次の式で書き表された．

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r \tag{1}$$

また，実数列の場合と同じように複素数列についても数列の収束性の意味が明らかにされた．ところで，定義によって，(1)は

$$\lim_{n\to\infty} |r_n - r| = 0$$

と同等である．$|r_n - r|$ は負でないから，収束数列を習得してこれを自由に使いこなせるようになるためには，何よりもまず，与えられた正の s_n が自然数 n の関数として無限小であるかどうかを容易にしかもほとんど自動的にわかるようになる必要がある．1節で述べたように，s_n が無限小であるというのは

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

が成り立つことである．ここで，解析学でよく出会う典型的ないくつかの無限小について考察することにしよう．それらは，掛け算の九九のように知らず知らずのうちに使えるほど深く知っていなければならない無限小である．無限小の調べ方の基本は，初めて出会う新しい無限小を，記憶の中にしっかり根付いているよく知っている無限小と比較することにある．

記号 O と o　　2つの s_n と t_n を比較するための基本的な方法は，n を大きくしたときの比 $\dfrac{t_n}{s_n}$ の行動を考察することにある．ここで，この比について，2つの重要な場合があり，それに対して解析学では特別な記号が導入されている．

1. $\dfrac{t_n}{s_n}$ は有界である．すなわち定数 c が存在して，任意の n に対して

$$\left|\frac{t_n}{s_n}\right| < c$$

が成り立つ．この場合

$$t_n = O(s_n) \qquad (2)$$

と書く．

2. $\dfrac{t_n}{s_n}$ は無限小である．すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{s_n} = 0$$

である．この場合

$$t_n = o(s_n) \qquad (3)$$

と書く．

明らかに，(3)から(2)が得られる．実際，$n \to \infty$のとき $\dfrac{t_n}{s_n}$ が0に収束するならば，明らかに $\dfrac{t_n}{s_n}$ は n に関して有界である．

記号 O と o は使用すると便利である．この記号は解析学でよく使われるので，その意味をしっかり記憶しておかなければならない．

さて，s_n が無限小ならば，(2)から，t_n もまた無限小なことが得られる．また，s_n が無限小で，(3)が成り立っているとき，t_n は s_n より速く0に収束するといえる．つぎに，(2)と(3)は，s_n が1の場合，すなわち，数列 s_1，s_2，…，s_n，…の項がどれも1である場合もよく使われる．この場合(2)と(3)は次のように書かれる．

$$t_n = O(1) \qquad (4)$$

$$t_n = o(1) \qquad (5)$$

容易にわかるように，(4)は t_n が有界であることを意味しており，一方，(5)は t_n が無限小であることを意味している．

つぎに，t_n はしばしば s_n 自身でなく s_n の累乗と比較される．

$$t_n = O({s_n}^k)$$

のとき，t_n は s_n に関して**無限小の位数** k をもつという．ただし，s_n は無限小

で，k は自然数である．与えられた無限小 s_n に関していろいろな無限小の位数をもつ t_n の研究は解析学で重要な役割を果たしている．

解析学では，無限小と並んで無限大もまた考察される．s_n が**無限大**であるというのは，n が大きくなるとき $|s_n|$ が限りなく大きくなること，すなわち，任意の正数 c に対して，適当な自然数 ν を見つけて，$n > \nu$ ならば

$$|s_n| > c$$

が成り立つようにできることである．この場合，次のように書く．

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \tag{6}$$

記号 lim は，ここでは，(6)の右辺が有限の数の場合とは異なった別の意味のものである．

ところで，互いに逆数の関係にある s_n と t_n について，すなわち

$$s_n t_n = 1$$

を満たす s_n と t_n について考察することもまた有益である．明らかに，この場合，t_n が無限小であるのは，s_n が無限大のときしかもそのときだけである．したがって，s_n と t_n が互いに逆数の関係にあるとき，次の2つの式は同等である．

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} t_n = 0 \tag{7}$$

無限大の最も簡単な例は，$s_n = n$ である．したがって，(7)から，$t_n = \dfrac{1}{n}$ は無限小であることがわかる．このことを書き表すと

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

となる．

ニュートンの2項定理　　具体的な数列が $s_n = n$，$t_n = \dfrac{1}{n}$ よりももっと複雑な数列の場合，無限大あるいは無限小であることを確かめるためには，いろいろな代数学の公式を使わなければならない．その中でとくに重要な役割を果たしているのは“ニュートンの2項定理”である．この定理は初等代数で扱われているものであるが，ここで改めて証明しておこう．

まずはじめに，記号

$$n! = 1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n$$

を思い出そう．つまり，$n!$ は1から n までの自然数の連乗積である．また

$$0! = 1$$

と定義する．さて，ニュートンの2項定理は，2項式 $z + w$ の n 乗を z の累乗と w の累乗の多項式に展開して得られる等式である．すなわち，それは次の形の等式で与えられる．

$$(z + w)^n = \sum_{\substack{p,q \geqq 0 \\ p+q=n}} \frac{n! z^p w^q}{p! q!} \tag{8}$$

ここで，記号 $\sum_{\substack{p,q \geqq 0 \\ p+q=n}}$ は，$p + q = n$ なるすべての負でない整数 p，q についてこの記号のあとの式を全部加えることを意味している．この等式の証明は帰納法で行う．まず第1に，明らかに $n = 1$ のとき(8)は成り立つ．実際

$$(z + w)^1 = \frac{1!}{1!0!}z + \frac{1!}{0!1!}w$$

が成り立つ．つぎに，(8)が $n = k - 1$ のとき成り立つと仮定して，$n = k$ のときにも成り立つことを証明する．このため，$(z + w)^{k-1}(z + w)$ を計算しよう．その際，帰納法の仮定により $(z + w)^{k-1}$ は(8)の形に書ける．この場合，右辺の式は

$$\frac{(k - 1)!}{i! j!} z^i w^j \tag{9}$$

の形の項から構成されている．ただし，i と j は負でない整数で，$i + j = k - 1$ である．

(9)を z に掛けると，$z^{i+1}w^j$ を因数にもつ項が得られる．(9)を w に掛けると，$z^i w^{j+1}$ を因数にもつ項が得られる．この2つの項が同類項で，$z^p w^q$ を因数にもつためには，z に掛けた項については

$$i = p - 1, \quad j = q$$

とならなければならないし，w に掛けた項については

$$i = p, \quad j = q - 1$$

とならなければならない．この2つの項の係数を計算してそれらを加えると

$$\frac{(k - 1)!}{(p - 1)! q!} + \frac{(k - 1)!}{p!(q - 1)!}$$

が得られる．この式の第1項の分子と分母に p を掛け，第2項の分子と分母に q を掛けて，この2つの項を通分し，これらの項を加えると

$$\frac{(k-1)!p+(k-1)!q}{p!q!}=\frac{(k-1)!(p+q)}{p!q!}=\frac{k!}{p!q!}$$

が得られる．したがって，(8)は $n=k$ のとき成り立つ．これで(8)の帰納法による証明が完了した．

今度は，係数 $\dfrac{n!}{p!q!}$ の分子と分母を $p!$ で割って係数を別の形に書き換える．そうすると，次の等式が得られる．

$$(z+w)^n=z^n+\frac{n}{1!}z^{n-1}w+\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}w^2+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-q+1)}{q!}z^{n-q}w^q+\cdots+w^n \quad (10)$$

ニュートンの2項定理(8)のこの形の等式が普通初等代数で述べられている．

無限小の具体例　ここでは，解析学にとって最も重要な具体的な正の無限小と無限大について，同じことであるが，0に収束する数列と限りなく大きくなる数列について考察することにしよう．なお，先に指摘しておいたように((7)参照)，この両者には深い関係がある．

第1に重要なのは等比数列である．

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^n,\ \cdots \quad (11)$$

ただし，α は正の数である．これについて次のことが成り立つ．$\alpha<1$ のとき，数列(11)は0に収束し，すなわち，α^n は無限小で，$\alpha>1$ のとき，数列(11)は限りなく大きくなる．すなわち，α^n は無限大である．この結果を式で書き表すと次のようになる．

$$\alpha<1\text{ のとき}\quad \lim_{n\to\infty}\alpha^n=0 \quad (12)$$

$$\alpha>1\text{ のとき}\quad \lim_{n\to\infty}\alpha^n=\infty \quad (13)$$

(12)と(13)を証明しよう．まず明らかに，(12)と(13)は同値である．実際，$\beta=\dfrac{1}{\alpha}$ とおき数列

$$1,\ \beta,\ \beta^2,\ \cdots,\ \beta^n,\ \cdots \quad (14)$$

をつくる．

そうすると，数列(11)と(14)は互いに逆数の関係にある．したがって((7)参照)，この中の一方が0に収束すれば他方は限りなく大きくなる．このことを，α と β の中の一方が1より小さいならば他方は1より大きいという

事実と照し合わせてみると，(*12*)と(*13*)は同値であることがわかる．したがって，(*12*)と(*13*)を証明するためには，その中の1つだけを証明すればよい．

そこで，(*13*)を証明しよう．$\alpha > 1$ であるから，次のように書ける．

$$\alpha = 1 + \delta$$

ただし，δ は正の数である．ニュートンの2項定理(*10*)によって

$$\alpha^n = (1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \cdots$$

が得られる．ここで，右辺の3項以後の項はすべて正である．したがって

$$\alpha^n > n\delta$$

が成り立つ．δ は正の数であるから，n が大きくなるとき，$n\delta$ は限りなく大きくなる．したがって，α^n についても同じことが成り立つ．これで(*13*)が証明された．しかも同時に(*12*)も証明された．

こうして，$0 < \alpha < 1$ のとき，α^n は無限小であることが証明された．この無限小は解析学において比較の基準としてたいへんよく使われる．したがって，(*12*)は，しっかり覚えて，考えこまずにいつでも使えるようにしておかなければならない．

さて，(*12*)と(*13*)の証明のときに用いたのと全く同じ方法で次のもっと強力な結果が証明される．すなわち，$\alpha > 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n^k} = \infty \qquad (15)$$

が成り立つ．ただし，k は任意の自然数である．これから，逆数の関係を使うと，次の結果が得られる．すなわち，$\alpha < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} n^k \alpha^n = 0 \qquad (16)$$

が成り立つ．ただし，k は任意の自然数である．これらの中の第1の結果(*15*)を言葉でいい表すと，$\alpha > 1$ のとき，任意の自然数 k に対して，α^n は n^k より速く無限大になる，ということである．また，第2の結果(*16*)については，$\alpha < 1$ のとき，任意の自然数 k に対して，α^n は $\dfrac{1}{n^k}$ より速く0に収束する，ということができる．

ところでここでは，(*12*)と(*13*)の証明の場合と同じように，(*15*)だけを，すなわち，$\alpha > 1$ の場合だけを証明することにしよう．まず

$$\alpha = 1 + \delta$$

とおく．ただし，δ は正の数である．そうすると

$$\alpha^n = (1+\delta)^n = 1 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\delta^{k+1} + \cdots$$

ここで，右辺の書いてない項はすべて正である．つぎに，係数

$$a = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}$$

について見てみよう．右辺の分子には $k+1$ 個の因数がある．$n > 2k$ のとき，これらの因数はどれも $\frac{n}{2}$ より大きい．したがって

$$\frac{\alpha^n}{n^k} > \frac{1}{n^k}\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1}\frac{\delta^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{n}{2^{k+1}(k+1)!}\delta^{k+1}$$

が成り立つ．ゆえに，n が限りなく大きくなるとき，$\frac{\alpha^n}{n^k}$ もまた限りなく大きくなる．これで(*15*)が証明された．また，これから(*16*)も正しいことがわかる．

等式(*16*)は本質的に強化できる．すなわち，$n^k\alpha^n$ は，無限小であるというだけでなく，実はもっと速く 0 に収束する，つまり，ある減小等比数列よりも速く 0 に収束する．このことを証明しよう．$\alpha < 1$ であるから，α と 1 の間にある定数 γ が存在する．すなわち

$$\alpha < \gamma < 1$$

を満たす γ が存在する．このとき，$n^k\frac{\alpha^n}{\gamma^n} = n^k\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^n$ は，$\frac{\alpha}{\gamma} < 1$ であるから無限小である（(*16*)参照）．これから，$0 < \alpha < 1$ のとき，

$$n^k\alpha^n = o(\gamma^n) \tag{17}$$

が得られる．ここに，γ は条件 $\alpha < \gamma < 1$ を満たす定数である．

最後にもう 1 つ解析学にとって重要な次の無限小について考察しよう．

$$\frac{\alpha^n}{n!} \tag{18}$$

ただし，α は任意の正の数である．ここで，(*18*)が無限小であること，つまり，n が限りなく大きくなるとき，(*18*)は 0 に収束するということ，このことだけでなくそれ以上に，(*18*)はある減小等比数列によって評価されることを証明する．すなわち，任意の正の数 α に対して，適当な正の数 $\gamma < 1$ をとって

$$\frac{\alpha^n}{n!} = O(\gamma^n) \tag{19}$$

が成り立つようにできる．

さて，評価(*19*)を証明しよう．まず最初に

$$\alpha < k + 1$$

を満たす最小の整数 k をとる．明らかに，$k \geqq 0$．つぎに

$$\gamma = \frac{\alpha}{k+1}$$

とおく．明らかに，$\gamma < 1$．$n < k$ なる n を考える．この n に対して，$n = k + l$ とする．ただし，$l \geqq 0$ である．そうすると

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\alpha^{k+l}}{(k+l)!} = \frac{\alpha^k}{k!}\cdot\frac{\alpha^l}{(k+1)\cdots(k+l)} \leqq \frac{\alpha^k}{k!}\cdot\frac{\alpha^l}{(k+1)^l}$$
$$= \frac{\alpha^k}{k!}\gamma^l = \frac{\alpha^k}{k!\,\gamma^k}\cdot\gamma^{k+l} = \frac{\alpha^k}{k!\,\gamma^k}\gamma^n$$

したがって，$n \geqq k$ のとき

$$\frac{\alpha^n}{n!} \leqq b\gamma^n, \quad \text{ただし} \quad b = \frac{\alpha^k}{k!\,\gamma^k}$$

が得られる．$n < k$ の場合，次の不等式を考察する．

$$\frac{\alpha^n}{n!} \leqq c\gamma^n \tag{20}$$

ただし，c は定数である．明らかに，不等式(*20*)において n は1から $k-1$ までの有限個の値をとるだけであるから，(*20*)が $n < k$ なるすべての n に対して成り立つように c を選ぶことができる．最後に，b と c の中の大きいほうを a とすると，不等式

$$\frac{\alpha^n}{n!} \leqq a\gamma^n$$

が得られる．これで(*19*)が証明された．

評価(*19*)から，$n!$ は任意の正の数 α に対して α^n より速く増大することがわかる．また，逆数をとって考えると，$\dfrac{1}{n!}$ は正の数 $\alpha < 1$ に対して α^n より速く0に収束するということができる．

例　正の数 α の正の整数乗 α^n は自然な意味で定まるのに対して，代数では α の0乗や負の整数乗が別に改めて定義されている．その際逆数が用いら

れる．また，α の有理数乗も累乗根を用いてうまく定義されている．それに対して α の実数乗の定義は微妙である．しかしそれも定義されている．後でこのことについて詳しく述べる．ところで，ここでは α の実数乗が定義されたものと考え，したがって関数

$$y = \alpha^x \tag{21}$$

が定義されたものと見なすことにする．ただし，x は任意の実数で，正，負または0で，$\alpha > 0$ である．つぎに，関数(21)と並んで関数

$$y = ax^k \tag{22}$$

を考える．ただし，a は正の数で，k は自然数である．さて，関数(21)と(22)のグラフを x が負でないところで描こう．(15)から，それは x が整数値の場合であるが，(21)は x が大きくなるとき，(22)よりも速く増大することがわかる．したがって，十分大きい x に対して，(21)のグラフは(22)のグラフの上方にくる．いま，α は $\alpha > 1$ で，1に近いとし，a は大きいとすれば，曲線(22)は座標の原点から始まり，曲線(21)は縦軸上の点1から始まるが，$x > 0$ の増大のはじめの段階において，曲線(22)は(21)よりも速く上方に上がっていく．したがって，この2つの曲線は交わる．しかし，その後で曲線(21)はしだいに(22)の上に出てくる．したがって，この2つの曲線は再び交わる（図6）．

次の場合，このような特長を示している図形が得られる．

$$y = 2^x \tag{23}$$

$$y = 4x \tag{24}$$

この場合，関数(23)と(24)のグラフは2点で交わる．1つの交点は $x = 4$，$y = 16$ である．さて，初等数学の標準的でない問題の中に，方程式

$$2^x = 4x \tag{25}$$

を解けという問題がある．すなわち，(23)と(24)の交点を求めよという問題である．生徒の中にときどき問題の意味を，2次方程式の解の公式と類似の公式を見つ

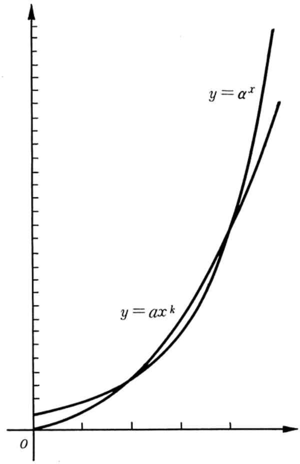


図6

け，それを用いて解を求めることであると理解し，(25)の解として $x=4$ を出す者がいる．問題をこのように理解したのでは意味がない．なぜなら，$x=4$ が(25)の解であることは自然な考えで確かめられるからである．方程式(25)の解を求める問題の意味は $x<4$ なるもう1つの解を求めることにあると理解しなければならない．しかも，この解は近似的にしか求められないのである．また，この解の存在は(23)と(24)のグラフを検討してみれば明らかである．

3. コーシーの収束条件

さきに述べたように，古代の幾何学者はすでに長さが有理数で表せない曲線を見つけていた．ここに，有理数とは $\dfrac{b}{a}$ の形の数である．ただし，a と b は整数である．このような曲線の例として，直角をはさむ2辺の長さがどちらも1の直角三角形の斜辺の長さがあげられる．この長さはいまは $\sqrt{2}$ で表されている．もっとあとで，直径が1の円周の長さも有理数で表せないことが見つけられた．この長さをいまは π で表している．この $\sqrt{2}$ も π も有理数でない．この種の数は有理数と区別して**無理数**とよばれている．無理数の個数は確かに無限である．実際，a を整数とすると $a\sqrt{2}$ の形の数はすべて無理数である．さて，前世紀の数学者に対して生じた問題は幾何学や解析学に欠かせないこれらの数を記述すること．必要なら創出することであった．この数の記述は当然有理数をもとにしてなされなければならないが，その際有理数についてはよく知られ十分に理解されているものと仮定しておく．ところで，これらの数学に必要な数の記述はいくつかの異なる方法でなされた．しかしどの記述の方法でも，新たに構成された数について必要なすべての性質を完全に証明することはかなり大事である．この節では，それらの構成法の1つについて述べる．しかしながら，その証明の詳細には立ち入らないで，証明は概要にとどめておくが，読者は，もし試みたいならばその証明を完全に再構成できるようにしておく．しかし，著者はこの再構成はすすめない．なぜなら，それは全く退屈なものと思われるからである．

さて1節で述べた収束の定義によって，数列

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots \tag{1}$$

が与えられた数 r に収束するかどうかという問いに答えられる．しかしここで非常に重要なのは，数列(1)が未知の何らかの数に収束するかどうかという問いに答えられる形で，収束条件を定式化することである．この要求を満たしているのがコーシーの条件である．

コーシーの条件　実数列または複素数列(1)が**コーシーの条件を満たす**，あるいは**コーシー列**であるというのは，任意の正の数 δ に対して，適当な自然数 ν を選んで

$$p > \nu, \quad q > \nu \tag{2}$$

ならば不等式

$$|r_p - r_q| < \delta \tag{3}$$

が成り立つようにできることである．

まず，コーシーの条件が収束のための必要条件であることを証明しよう．数列(1)が r に収束すると仮定しよう．正の数 $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2}$ を与える．このとき，収束の定義（1節，(11)参照）によって，自然数 v が存在して，$n > v$ ならば

$$|r_n - r| < \varepsilon$$

となる．したがって，p，q が不等式(2)を満たすならば，次の2つの不等式が成り立つ．

$$|r_p - r| < \varepsilon, \quad |r_q - r| < \varepsilon$$

これから

$$|r_p - r_q| = |r_p - r + r - r_q| \leqq |r_p - r| + |r - r_q| < 2\varepsilon = \delta$$

が得られる．したがって，数列(1)がある数 r に収束するならば，コーシーの条件が満たされる．これでコーシーの条件が収束のための必要条件であることが証明された．このことは実数列と複素数列に対して同時に示された．これら2つの場合に対して証明の上で何ら違いがないのである．

このように容易に，コーシーの条件は収束の必要条件であることが証明された．しかし，十分性については事情は全く別である．そこでは，証明のむずかしさばかりでなく，ある何らかの数の存在の証明という完全に根源的な問題に出会うことになる．しかもこの場合，本質的に議論の対象となるのは実数であ

る．複素数の場合は実数に還元される．なぜなら，複素数 z は，$z = x + iy$ と書かれるからである．ここに，x と y は実数である．

有理数の概念は何世紀かの間に徐々に形成されてきたのであるが，いまでは完全に明らかにされていると考えられる．一方，最初の無理数の出現はピタゴラスの定理と関係しており，数学史上の最も大きな事件であった．“無理数”すなわち，非合理的な数という名前自体に，古代の数学にもたらした不安が示されている．無理数の表現に関する複雑で長期にわたる発展史には触れないことにして，コーシーの条件は収束の十分条件として数学に必要欠くべからざるものであった，とだけいっておこう．したがって，数というものは，実数のコーシー列はすべてある実数に収束するような存在でなければならないのである．

実数の構成　有理数の概念がわかっていることを前提にすると，まず第1に実数に対する上の要請から得られる結論は，有理数のコーシー列はすべてある実数に，つまり有理数あるいは無理数に収束しなければならない，ということである．いま，有理数のコーシー列を

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \tag{4}$$

とする．この数列がある有理数に収束すれば，この場合は何も問題はない．もしこのような，(4)が収束するような有理数が存在しなければ，ある無理数が存在することを認め，数列はその無理数に収束するものとする．このことを認め，このようにして事実上，有理数のコーシー列によって数を定め，数の新しい表現を導入する．

こうして，有理数のコーシー列によってすべての実数，つまり有理数または無理数が定義される．さて，数列(4)によって与えられる実数を s とする．そうすると，数列(4)の項は実数の近似値を与えていると見なさなければならない．このとき，近似の精度は容易に評価できる．実際，定義によって，任意の正の数 δ に対して，自然数 ν が存在して，(4)の番号が ν より大きい任意の2つの項 s_p と s_q について，s_p と s_q の差の絶対値は δ より小さい．したがって，(4)の $n > \nu$ なる番号の項 s_n は，s の近似値で精度は δ である．実数 s を定める有理数のコーシー列によって，s は任意の精度で計算できるから，このように定められた実数に対して演算を定義することができる．しかもその際生じるすべての問題に答えることができる．

有理数のコーシー列(4)と平行してもう1つ有理数のコーシー列

$$s_1',\ s_2',\ \cdots,\ s_n',\ \cdots \tag{5}$$

をとる．このとき，まず第1に答えなければならない問題はこの2つの数列は同一の実数を定めるかどうかということである．答えは明らかである．すなわち，有理数列

$$s_1 - s_1',\ s_2 - s_2',\ \cdots,\ s_n - s_n',\ \cdots \tag{6}$$

をつくる．数列(4)と(5)が同一の実数を定めるのは，数列(6)が0に収束するときしかもそのときだけである．この場合，数列(4)と(5)は**同値**であるという．

数列(4)によって与えられた実数が正であるのは，数列(4)のある番号より大きい番号の項がすべてある1つの正の有理数より大きいときしかもそのときだけである．

さて，実数 s を定める数列(4)と平行して，実数 t を定める有理数列を

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n,\ \cdots$$

とするとき，s と t に対する演算をどのように定義しなければならないか，ということは明らかである．実際，実数の和 $s+t$ は，有理数列

$$s_1 + t_1,\ s_2 + t_2,\ \cdots,\ s_n + t_n,\ \cdots$$

によって定義される．この数列はコーシー列だからである．また，差 $s-t$，積 st，商 $\dfrac{s}{t}$ もまた対応の有理数列を用いて同じ方法で定義される．ただし，商 $\dfrac{s}{t}$ は分母 t が0でないときだけ定義することができる．さらに，いつ実数が正になるか，ということを知っており，実数の引き算もできるので，実数に対して不等号は何を意味しているか，ということもわかる．

それから，このように定義された実数に対して，コーシーの条件は収束の十分条件であることがわかる．しかしその証明には興味がないので，ここではやらないことにする．

また，複素数 z が，x，y をいまのように定義した実数として，$z = x + iy$ の形の式で与えられたとすれば，容易にわかるように，複素数のコーシー列はある複素数に収束する．

こうして，実数と複素数が構成され，それに対して，コーシーの条件が収束の必要十分条件になっていることがわかった．

例　無限小数を

$$a.f_1f_2\cdots f_n\cdots \tag{7}$$

とする．ここで，小数点の後に数字 f_1, f_2, …, f_n, …が並んでおり，これらの数字の値は 0 から 9 までのいずれかである．小数点の前の a は整数で，小数で書いてないが，正，負または 0 である．無限小数(7)は，表記上小数点の後に無限個の数字が並んでいるが，もしある番号から後の数字がすべて 0 ならば，実際は有限小数である．さて，無限小数(7)から次の有限小数の無限数列が生み出される．

$$\begin{aligned}
&s_0 = a\\
&s_1 = a.f_1,\\
&s_2 = a.f_1f_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&s_n = a.f_1f_2\cdots f_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{8}$$

ここで，s_n は有限小数で，小数点の前には整数 a があり，小数点の後には n 個の数字 f_1, f_2, …, f_n が並んでいる．このような構成は以前に考察したものである（1 節，(8)，(9)参照)．しかしここでは，有理数列(8)はコーシー列であることを確かめることができる．実際，$p < q$ が 2 つの自然数ならば

$$s_p - s_q < \frac{1}{10^p}$$

が成り立つ．したがって，p と q がどちらも自然数 ν より大きいならば

$$|\,s_p - s_q\,| < \frac{1}{10^{\nu+1}}$$

が成り立つ．これは数列(8)がコーシー列であることを意味している．ゆえに，定義によってこれは 1 つの実数 s を，つまり有理数または無理数を定める．ところで，この s は無限小数(7)で表されていると見なすのは自然なことである．しかしながら，任意の実数がこのように無限小数で表すことができるかどうかはまだ明らかになっていない．4 節で任意の実数は無限小数で表すことができることを証明する．

4. コーシーの収束判定法の応用

コーシーの収束判定法の十分性を用いると，いろいろな場合に数の存在問題について考えることが可能で，いいかえると必要な数を構成することが可能である．この節ではこのような構成のいろいろな例をあげてみよう．とくに円弧の長さを正確に定義することにしよう．

上限と下限　実数 x はすべて横軸上の座標が x の点として表すことができる．これからこの点自身も x で示すことにする．数をこのように直線上の点として表現すれば，数は幾何的に見えるように扱える．また，数に関する用語と同じく幾何学の用語も同時に使用する．

さて，有限小数を

$$a.f_1f_2\cdots f_n \tag{1}$$

とする．ここに，小数点の前の整数 a は，正，負または0であり，小数点の後に n 個の数字が並んでいる．このとき，この形の有限小数はすべて $\dfrac{b}{10^n}$ の形の分数で書くことができる．ただし，b は整数である．逆に，$\dfrac{b}{10^n}$ の形の分数はすべて(*1*)の形の有限小数で書くことができる．また，$n=0$ のとき，有限小数(*1*)は整数であり，対応する直線上の点を整数点とよぶ．これらの整数点を図示するのは容易である．いわばそれらの整数点は直線上に整数点からなる網を構成する．$\dfrac{b}{10}$ の形の分数もまた直線上の点として表すと，整数点の網の各区間を10等分して得られる網を構成する．この網は整数点の網よりも細かい網である．

全く同じようにして，$\dfrac{b}{10^2}$ の形の分数は $\dfrac{b}{10}$ の網の各区間を10等分して得られるさらに細かい網を構成する．このようにして直線上に $\dfrac{b}{10^n}$ の形の分数から生じるしだいに細かくなる網の列が得られる．ただし，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ である．そこで，これらの網に番号を付けて，$\dfrac{b}{10^n}$ の形の分数の網を $\sum_n$ と書

くことにする．

さて，M を実数の集まり，つまり実数の集合とする．この M の数は直線上の点と見なすこともできるので，M は同時に直線上の点の集合でもある．つぎに，M は上に有界であると仮定する．すなわち，適当な実数 c が存在して，M に含まれるすべての実数に対して不等式

$$x < c \tag{2}$$

が成り立つとする．幾何学的にいうと，集合のすべての点は点 c の左側にあることを意味している．

これから次のことを証明する．上に有界な集合 M は上限をもつ．すなわち，次の条件を満たす実数 g が存在する．任意の正の数 ε に対して，M の中に不等式

$$x > g - \varepsilon$$

を満たす x が存在し，一方，M の中に g より大きい x，つまり

$$x > g$$

を満たす x は存在しない．このような実数 g を，集合 M の**上限**という．幾何学的には上限 g は次のように描写できる．点を点 g に左からどれだけ近づけても，つまり ε を任意の正の数として，点 $g-\varepsilon$ をとっても，この点 $g-\varepsilon$ の右に少なくとも 1 つ集合 M の点が存在し，点 g の右には集合 M の点は 1 つも存在しない．

集合 M の上限 g の構成は次のようなやり方で行われる．幾何学的に集合 M と網 $\sum_n$ の点を比べる．$\sum_n$ から点 c（(2)参照）の右にある点 p をとるならば，M のすべての点は p の左にある．他方，$\sum_n$ の中に，q の右に M の点があるような点 q が存在する．p と q の間に $\sum_n$ の点は有限個しかないので，$\sum_n$ の点で，右に M の点があるような点の中に最も右にあるものが存在する．この点を s_n とする．$n=0$，1，…に対して，このように点 s_n を選ぶことによって数列

$$s_0,\ s_1,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \tag{3}$$

が得られる．明らかに，この点列において，後の点は前の点と一致するか，あるいは前の点の右にある．また，明らかに，点列(3)においてある点から後のすべての点が同一の点になってしまって，右へ進まないということは起こりえない．なぜなら，点 s_n は，その右に M の点があるように選ばれているからで

ある．したがって，十分大きい番号 n' に対して $s_{n'}$ は s_n の右にある．このことから，数列(*3*)は3節の(*8*)の形の有限小数の数列，すなわち無限小数(*7*)から生じた有限小数の数列であることがわかる．この無限小数は本来の無限小数である．なぜなら，点列(*3*)はだんだんと右へ進んでいくからである．コーシー列(*3*)によって定められる実数を g とすると，容易にわかるように，この g が M の上限である．また，M が1点 m だけから構成されておれば，$g = m$ であり，3節(*7*)の無限小数はこの m を表している．ゆえに，すべての実数は無限小数で表すことができる（3節，例参照)．したがって明らかに，実数全体の集合は無限小数全体の集合として記述することができる．

今度は，実数の集合 M' は下に有界であると仮定する．すなわち，適当な実数 c' が存在して，M' に含まれるすべての実数 x に対して不等式

$$c' < x \tag{4}$$

が成り立つとする．そうすると次のことが証明される．下に有界な集合 M' に対して，下限 g' が存在する．すなわち，次の条件を満たす実数 g' が存在する．任意の正の数 ε に対して，M' の中に不等式 $x < g' + \varepsilon$ を満たす x が存在し，不等式 $x < g'$ を満たす x は存在しない．証明のために，x が M' に含まれるような実数 $-x$ 全体の集合を $-M' = M$ とおく．M' が下に有界ならば，M は上に有界で，したがって上限 g をもつ．明らかに，$g' = -g$ は M' の下限である．

上極限と下極限　上にも下にも有界な実数の無限集合を M とする（(*2*)，(*4*)参照)．p が集合 M の**上極限**であるとは，次の条件を満たす実数のことである．任意の正の数 ε に対して，M に含まれる実数で，$p - \varepsilon$ より大きいものからなる無限集合が存在し，M に含まれる実数で，$p + \varepsilon$ より大きいものはたかだか有限個である．同じようにして，p' が集合 M の**下極限**であるとは，次の条件を満たす実数のことである．任意の正の数 ε に対して，M に含まれる実数で，$p' + \varepsilon$ より小さいものからなる無限集合が存在し，M に含まれる実数で，$p' - \varepsilon$ より小さいものはたかだか有限個である．さて，集合 M は上極限をもつことを証明しよう．集合の上限の構成の場合と全く同じように考えていく．負でない整数 n に対して，$\dfrac{b}{10^n}$ の形の分数（ただし，b は整数である）の中から，M に含まれる実数で，s_n より大きいものからなる無限集合が

存在するような最大の s_n を選ぶ．明らかに，数列

$$s_0,\ s_1,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots$$

は，3節の(*8*)の形の有限小数からなる単調増大列であり，したがってコーシーの収束条件を満たす．この数列の極限は明らかに集合 M の上極限である．集合 M の下極限 p' の存在も下限の場合と全く同じように集合 $-M$ を考察することによって証明される．ところで，容易に確かめられるように，p と p' は集合 M の集積点である（1節，例3参照）．したがって，上にも下にも有界な実数の無限集合は集積点をもつことが証明された．また明らかに，p は集積点の中の最大のものであり，p' は集積点の中の最小のものである．p と p' が一致することがある．この場合，M はただ1つの集積点 $p=p'$ をもつ．M を p に収束する互いに相異なる項からなる数列の項全体の集合とするとき，M はこのような場合の例になっている．

有界数列と有界集合　実数列または複素数列

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots \tag{5}$$

が**有界**であるというのは，適当な正の数 c が存在して，すべての番号 n に対して不等式

$$|r_n| < c$$

が成り立つことである．同じように，実数または複素数の集合 M が**有界**であるというのは，適当な正の数 c が存在して，M に含まれるすべての x に対して不等式

$$|x| < c$$

が成り立つことである．ここでは，最初，すべての有界数列(*5*)から収束する部分列（1節，(*18*)参照）を選び出すことができることを証明し，その後で，任意の有界な無限集合は集積点（1節，例3参照）をもつことを証明しよう．

すでに指摘したように，数列(*5*)において異なる番号の項が互いに等しくなることがある．つまり，(*5*)には異なる項が有限個しかないことがある．この場合，適当な数 r が存在して，(*5*)には r に等しい項が無限個存在する．(*5*)の r に等しいすべての項を，(*5*)の項の順序と同じ順に並べると，(*5*)の部分列

$$r_{n_1},\ r_{n_2},\ \cdots,\ r_{n_k},\ \cdots \tag{6}$$

が得られ，これらの項はすべて r に等しい．したがって，(*5*)の部分列(*6*)

は r に収束する．ゆえに，このような場合について最初の命題が証明された．

今度は数列(5)の項の値の集合 M は無限集合であるとしよう．はじめに，(5)の項はすべて実数である場合を考え，複素数の場合はその後で扱うことにする．したがって M は実数の集合とする．(5)は有界数列であるから，M は有界集合である．したがって，いま上で証明されたこと（上極限についての記述参照）によって，M は少なくとも1つ集積点をもつ．そうすると以前に証明されたこと（1節，例3参照）によって，M から，p に収束し異なる項を無限個をもつ数列

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n,\ \cdots \tag{7}$$

を取り出すことができる．(7)の項の順序を並べ換えて，その結果得られる新しい数列が p に収束し，同時にもとの数列(5)の部分列になるようにできる．それは次のようにすればよい．まず r_1 を考える．これが(7)に入っていなければ捨てる．(7)に入っていれば，それを r_{n_1} とする．つぎに r_2 を考える．これが(7)に入っていなければ捨て，入っていれば r_{n_2} とする．このように(5)のすべての項をつぎつぎに選び分けていくと，その結果無限数列

$$r_{n_1},\ r_{n_2},\ \cdots,\ r_{n_k},\ \cdots \tag{8}$$

が得られる．(5)から項を選ぶこの過程は停止することがない．なぜなら，(7)には異なる項が無限個あるからである．明らかにこのようにして得られた数列(8)は(5)の部分列である．しかし同時に，(8)は(7)のすべての項を含んでいるから，p に収束する．実際，p の任意の ε-近傍 U_ε はたかだか有限個の項を除いて(7)のすべての項を含む．したがって，このことは(8)についても同じように成り立つ．ゆえに，(8)は p に収束する．

さてつぎに，(5)が異なる項を無限個もつ数列で，項は実数に限らずに一般に複素数である場合について考えよう．まず，数列(5)の各項 r_n を

$$r_n = s_n + it_n$$

の形に書く．そうすると，次の2つの実数列が得られる．

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \tag{9}$$

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n,\ \cdots \tag{10}$$

(5)は異なる項を無限個もつという仮定によって，実数列(9)と(10)の少なくとも1つは異なる項を無限個もつ．ここでかりに，(9)が異なる項を無限個もつとしよう．(9)は実数列であるから，いま証明したばかりの結果によって，

(*9*)から s に収束し異なる項を無限個もつ部分列

$$s_{n_1},\ s_{n_2},\ \cdots,\ s_{n_k},\ \cdots \tag{11}$$

を取り出すことができる．今度は実数列

$$t_{n_1},\ t_{n_2},\ \cdots,\ t_{n_k},\ \cdots$$

について考察しよう．この数列も有界だから先の結果から，この数列より t に収束する部分列

$$t_{m_1},\ t_{m_2},\ \cdots,\ t_{m_k},\ \cdots$$

を取り出すことができる．ここで，自然数列

$$m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k,\ \cdots$$

は増加の順に並んでおり，しかも自然数列

$$n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k,\ \cdots$$

の部分列になっている．したがって，数列

$$s_{m_1},\ s_{m_2},\ \cdots,\ s_{m_k},\ \cdots$$

は(*11*)の部分列で，異なる項を無限個もっている．そこで

$$r_{m_k} = s_{m_k} + it_{m_k}$$

とおくと，このようにして得られる数列

$$r_{m_1},\ r_{m_2},\ \cdots,\ r_{m_k},\ \cdots \tag{12}$$

は異なる項を無限個もち，$r = s + it$ に収束し，しかも数列(*5*)の部分列になっている．ゆえに，有界数列(*5*)が異なる項を無限個もつとき，(*5*)から，異なる項を無限個もち，ある数 r に収束する部分列を選び出すことができる．

最後に，有界無限集合 M の場合に移り，M は集積点をもつことを証明しよう．M は数の無限集合であるから，M から，異なる項を無限個もつ数列

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots \tag{13}$$

を選び出すことができる．いま証明したことによって，(*13*)から，ある数 r に収束する部分列で，異なる項を無限個もつものを選び出すことができる．これより r は M の集積点であることがわかる．

以上で目的の命題は完全に証明された．

円弧の長さ　実数とは何か，が明らかにされた以上つぎに，曲線の長さはどのように理解するか，を明らかにするのは自然なことである．ただしその際，線分の長さとは何か，はよくわかっているものと前提しておく．p と q を端点とする線分の長さを，$l(p,\ q)$ で表す．ところでここでは，円弧の長さの場合

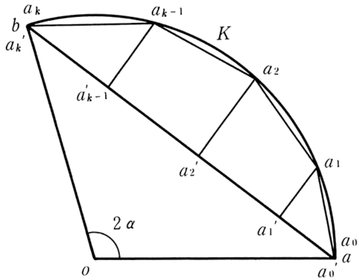


図 7

だけ考えることにしよう．一般の場合は原理的には円弧の場合と違わないが，後で（19 節参照）扱うことにする．平面 P 上に点 o を中心とする半径 1 の円を描き，その円周上に弧 ab をとる．ただし，角 aob は 120°以下とする（図 7）．角 aob を 2α とおく．したがって，$2\alpha \leqq 120°$ である．ゆえに，$\alpha \leqq 60°$ である．この制限は本質的ではない．また点 a から b まで円弧 ab に沿って点が動くときは，時計の針の回転と反対の向きに動くものとする．さて，目的は円弧 ab の長さを数学的に正確に定義することである．

弧 ab 上に点

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\ ;\quad a_0 = a\ ;\quad a_k = b \tag{14}$$

をとる．点 a_{i-1} から a_i までの移動は弧 ab に沿って時計の針の回転と反対の向きに動くことによって行われるとする．したがって，(14)の点は弧 ab に沿ってつぎつぎに引き続いて並び，これによって弧 ab は部分弧に分割される．このときできる折線 $a_0a_1a_2\cdots a_k$ を A で表し，折線 A を，弦 ab をもとにした折線ということにしよう．また折線 A の長さを $l(A)$ で表す．さて，折線 A の長さと弦 ab の長さを比べよう．明らかに

$$l(ab) \leqq l(A)$$

である．しかしこれだけではいまの目的には不十分である．(14)の点の弦 ab 上への射影をそれぞれ

$$a_0',\ a_1',\ a_2',\ \cdots,\ a_k'$$

とする．明らかに

$$l(ab) = l(a_0'a_1') + l(a_1'a_2') + \cdots + l(a_{k-1}'a_k')$$

ここで弦 $a_{i-1}a_i$ の弦 ab に対する傾斜角を β_i とする．このとき明らかに

$$l(a_{i-1}a_i) = \frac{l(a_{i-1}'a_i')}{\cos\beta_i} < \frac{l(a_{i-1}'a_i')}{\cos\alpha}$$

この不等式を i について 1 から k まで加えると

$$l(ab) \leqq l(A) < \frac{l(ab)}{\cos\alpha} \tag{15}$$

が得られる．$x = l(ab)$ とおき，差

$$d = \frac{x}{\cos\alpha} - x$$

を計算する．このためまず，$x = 2\sin\alpha$ となることを指摘しておく．したがって，$\cos^2\alpha = 1 - \frac{x^2}{4}$ となる．すると

$$\begin{aligned} d &= x\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) < x\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) \\ &= x\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \leqq \frac{x\sin^2\alpha}{\frac{1}{4}} = x\cdot x^2 \end{aligned}$$

が得られる．したがって，不等式(*15*)は次の形に書き換えられる．

$$x \leqq l(A) < x(1 + x^2) \tag{16}$$

さて，弧 $a_{i-1}a_i$ を，弧 ab に対して行ったのと同じやり方で部分弧に分割する．ただし分割の点は改めて書かない．この分割によって得られた折線を B_i で表す．B_i は弧 $a_{i-1}a_i$ をもとにした折線である．折線 B_i の長さを $l(B_i)$ で表す．つぎに，すべての折線 B_1，B_2，…，B_k を 1 つにまとめると，折線 B が得られる．その長さを $l(B)$ で表し，B を折線 A をもとにした折線という．

$$x_i = l(a_{i-1}a_i)$$

とおく．弦 ab に対して得られた(*16*)を弦 $a_{i-1}a_i$ に応用すると，不等式

$$x_i \leqq l(B_i) < x_i(1 + x_i^2) \leqq x_i(1 + (\delta(A))^2) \tag{17}$$

が成り立つ．ただし，$\delta(A)$ は $x_i (i = 1, \cdots, k)$ の最大値，すなわち折線 A を構成している線分の長さの最大値である．不等式(*17*)を i について 1 から k まで加えると

$$l(A) \leqq l(B) < l(A)(1 + (\delta(A))^2) \tag{18}$$

が得られる．先に示されたように，弦 ab をもとにした折線 A の長さは上に有界である．すなわち(*15*)からすべての A に対して

$$l(A) < \frac{l(ab)}{\cos\alpha} = c$$

が成り立つ．ここに，c は弦 ab だけに依存する定数である．ところで，不等式(*18*)から次の(*19*)を導き出すことができる．

$$|\, l(B) - l(A)\,| < c(\delta(A))^2 \tag{19}$$

ただし，A は弦 ab をもとにした任意の折線で，B は折線 A をもとにした折線である．

今度は，A と A' を弦 ab をもとにした 2 つの折線とする．A と A' の頂点に，点 a から時計の針の回転と反対の向きに弧 ab に沿って動くときに出会う順に番号を付けると 1 つの点列が得られ，この点列を頂点とする折線 B は A と A' の両方をもとにした折線になっている．このとき，不等式(*19*)と並んで，不等式

$$|\, l(B) - l(A')\,| < c(\delta(A'))^2 \tag{20}$$

が得られる．また，(*19*)と(*20*)から

$$|\, l(A) - l(A')\,| < c((\delta(A))^2 + (\delta(A'))^2) \tag{21}$$

が得られる．

さて，次のような折線の列をつくる．

$$A_0 = ab,\ A_1,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots \tag{22}$$

ただし，各折線はすぐ前の折線をもとにした折線で，最初の折線 A_0 は弦 ab である．さらに

$$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n) = 0$$

とする．このとき，不等式(*19*)からわかるように，数列

$$l(A_0),\ l(A_1),\ \cdots,\ l(A_n),\ \cdots \tag{23}$$

はコーシー列である．この数列の極限を $2s$ とおく．すなわち

$$\lim_{n\to\infty} l(A_n) = 2s$$

容易にわかるように，この極限 $2s$ は弧 ab だけ依存して，折線の列(*22*)の選び方に関係しない．実際，(*22*)のほかに別の折線の列

$$A_0' = ab,\ A_1',\ \cdots,\ A_n',\ \cdots$$

をとると，不等式(*21*)によって

$$|\, l(A_n) - l(A_n')\,| < c((\delta(A_n))^2 + (\delta(A_n'))^2)$$

が成り立つ．したがって，数列(23)と数列

$$l(A_0'),\ l(A_1'),\ \cdots,\ l(A_n'),\ \cdots$$

は両方とも同じ1つの $2s$ に収束する．この $2s$ を弧 ab の長さと定義する．また，円弧 ab の長さ $2s$ は弧度法で表した角 aob の大きさであるといわれている．高等数学ではとくにことわらない限り，三角関数の変数の値は弧度法で表した角の大きさであると見なされている．

不等式(15)から

$$x = 2\sin s \leqq l(A_n) < \frac{x}{\cos s} = \frac{2\sin s}{\cos s}$$

となる．ここで，$n \to \infty$ として得られる不等式の各辺を2で割ると

$$\sin s \leqq s \leqq \tan s \tag{24}$$

が得られる．さて，s_1，s_2，…，s_n，…を0に収束する正数列とすれば，(24)から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin s_n}{s_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan s_n}{s_n} = 1$$

が得られる．さらに，$\tan s_n = t_n$ とおくと，これから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan t_n}{t_n} = 1 \tag{25}$$

が得られる．なおここで，数列

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n,\ \cdots$$

は，0に収束する任意の正数列と見なしてよい．

半径1の円周の長さを 2π で表す．したがって，π は数学的に正確に定義された実数である．数値は $\pi \fallingdotseq 3.1415926$ である．

例1　数列

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \tag{26}$$

は上に有界な単調増加列であるとする．すなわち，$s_{n+1} \geqq s_n$ かつ $s_n < c$($n = 1, 2, \cdots$)とする．ただし，c は定数である．(26)の項からなる集合の上限を g とする．このとき，容易にわかるように

$$\lim_{n\to\infty} s_n = g$$

が成り立つ．全く同じように，下に有界な単調減少列

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n,\ \cdots \tag{27}$$

に対して

$$\lim_{n\to\infty} t_n = g'$$

が成り立つ．ただし，g' は(27)の項からなる集合の下限である．

5. 収 束 級 数

数学において収束数列よりも大きな役割を果たしているのは収束級数である．級数としては数を項とするものと同じように関数を項とするものを考えることができる．関数項級数の場合，級数を用いて，簡単なよく知られた関数，たとえば独立変数のべきのような関数をもとにして新しい関数を作成することが可能になる．ここで実際にこのような目的で級数を利用してみよう（7節参照）．そのためにまず実数または複素数を項とする級数について考える．

無限個の項 z_n，$n=1,\ 2,\ \cdots$，の無限和を

$$z_1 + z_2 + \cdots \tag{1}$$

と書く．そしてこれを級数とよぶことにする．級数の項は複素数または実数である．級数(1)に関する命題が，実数項の場合だけ意味をもつときは，そのことをあらかじめとくに注意をして述べることにする．

さて最初に明らかにしなければならないのは，級数の和とは何かということである．級数(1)の部分和，すなわち始めの n 個の項の和を

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \tag{2}$$

と書く．ここで，n は任意の自然数である．この数列

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \tag{3}$$

が収束する（1節参照）とき，級数(1)は収束するといい，級数(1)の和とは数列(3)の極限のことであると定義する．

数列(3)が与えられたとき，部分和がこの数列(3)に等しくなるような級数(1)を，1つの規則に基づいて求めることは容易である．実際，それには

$$z_1 = s_1,\ z_2 = s_2 - s_1,\ \cdots,\ z_n = s_n - s_{n-1},\ \cdots$$

とおけばよいからである．したがって，このことから，収束級数の研究は収束数列の研究に完全に帰着するし，しかも逆に，収束数列の研究を収束級数の研

究に帰着させることができそうに思われる．しかしそのようにいくとは限らない．まず第1にわかるように，問題を解くときに級数が生じるならば，そのときは級数を第1次の対象と見なさなければならない．一方，問題を解くときに数列が生じるならば，第1次の対象と見なさなければならないのは，今度は数列である．また，問題を解くとき，数列が生じ，その収束性を証明するために，それに対応する級数に移らなければならない場合がある．しかし，級数についてだけ意味をもち，数列については意味をもたない重要な問題もある．よく知られているように，有限個の項の和の値は，項の順序に無関係に定まる．しかしながら，このことは級数の和については成り立たない．すなわち，級数(*1*)の項の順序を適当に並べ換えると，新たにできた級数の和の値は，もとの級数の和の値と違うことがある．このことは以下の例1で証明する．

級数論において重要な役割を果たしているのは，級数の収束条件，つまりいいかえると，収束判定法である．級数の収束に関する第1番目の必要十分条件は，コーシーの条件で，数列に対するコーシーの収束条件（3節参照）を級数の言葉にそのまま言い直したものである．しかし，級数論においてとくに重要な役割を果たしているのは，収束の十分条件のほうであって，必要条件ではない．

コーシーの収束条件　級数(*1*)がコーシーの収束条件を満たすというのは，任意の正の数 δ に対して，適当に自然数 ν をとって

$$q > p > \nu$$

ならば，不等式

$$|z_{p+1} + z_{p+2} + \cdots + z_q| < \delta \qquad (4)$$

が成り立つようにできることである．この条件は級数が収束するための必要かつ十分な条件である．実際

$$|s_p - s_q| = |z_{p+1} + z_{p+2} + \cdots + z_q| \qquad (5)$$

したがって，級数(*1*)に対するコーシーの収束条件は，数列(*3*)に対する収束条件と全く同等である．後者の条件は，3節で示したように，数列(*3*)が収束するための必要かつ十分条件である．

ここで特別な場合として，$p = n - 1$，$q = n$ とおくと，$s_q - s_p = z_n$ となり，(*4*)と(*5*)は

$$|z_n| < \delta$$

となる．そこで，不等式(4)を用いると

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \qquad (6)$$

が得られる．ゆえに，収束級数の項は番号が無限に大きくなると零に収束する．

コーシーの収束条件からただちに得られる結果をもう1つあげておこう．級数(1)が収束するならば，級数

$$z_k + z_{k+1} + \cdots + z_{k+n} + \cdots \qquad (7)$$

もまた収束し，しかも，任意の正の数 δ に対して，適当に自然数 ν をとって，$k > \nu$ ならば，級数(7)の和の絶対値は δ 以下となるようにできる．

交代級数　今度は実数項級数

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \qquad (8)$$

が収束するための十分条件となっている1つの判定法を証明しよう．次のように仮定する．第1に，この級数の奇数番号の項はすべて正であり，偶数番号の項はすべて負である．第2に，各項の絶対値は前項の絶対値より小さい．すなわち

$$|z_{n+1}| < |z_n|$$

第3に，

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$$

である．このような級数(8)を交代級数という．このように定義すると，交代級数はつねに収束することがわかる．

このことを証明するために，式(2)によって与えられるこの級数の偶数番号 $n = 2k$ の部分和 s_{2k} を考えよう．すると

$$s_{2k} = (z_1 + z_2) + (z_2 + z_3) + \cdots + (z_{2k-1} + z_{2k})$$

が成り立つ．ここで右辺の括弧の項はすべて正である．したがって，s_{2k} は k の単調増大列である．他方，この部分和 s_{2k} は次の形に書くことができる．

$$s_{2k} = z_1 + (z_2 + z_3) + (z_4 + z_5) + \cdots + (z_{2k} + z_{2k+1}) - z_{2k+1}$$

ここで括弧の項は負であり，最後の項 $-z_{2k+1}$ も負である．したがって

$$s_{2k} < s_1$$

となる．ゆえに，数列

$$s_2,\ s_4,\ \cdots,\ s_{2k},\ \cdots$$

は単調増大列でしかも上に有界である．よってこの数列はある1つの数 s に

収束する（4節，例1参照）．奇数番号の部分和 s_{2k+1} は偶数番号の部分和 s_{2k} と z_{2k+1} の和で，z_{2k+1} は零に収束するから，すべての部分和からなる数列は，偶数番号の部分和と全く同じ s に収束する．

これで交代級数はつねに収束することが証明された．しかし，交代級数(8)について

$$t_k = z_1 + z_3 + z_5 + \cdots + z_{2k-1}$$

が，k が大きくなるとき無限に大きくなるならば，級数(8)の項の順序を適当に並べ換えることによって，任意に与えられた実数 t に収束する級数をつくることができる．このある種の収束級数に見られる普通の和と違う奇妙な性質，つまり項の順序を並べ換えることによって和の値が変わるという性質から思い浮かんでくるのは，この種の級数はこのほかにも級数を使うのにあまり適さない奇妙な性質をもちうるのではなかろうかということである．それで，級数論で基本的な役割を演じているのは，いわゆる絶対収束級数であり，この級数については6節で研究する．

例1　交代級数

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{9}$$

に対して，次のように和を2つつくる．

$$t_k = z_1 + z_3 + \cdots + z_{2k-1}$$

$$t_k' = z_2 + z_4 + \cdots + z_{2k}$$

このうち，前者は正で，k の単調増大列であり，後者は負で，絶対値が k の単調増大列である．ここで，$t_k \to \infty$ ならば，t_k' の絶対値は無限大になる．なぜならまず

$$s_{2k} = t_k + t_k'$$

である．s_{2k} は k が大きくなるとき一定の極限に収束するから，正の t_k が限りなく増大するという仮定の下では，$k \to \infty$ のとき，負の t_k' は限りなく減少しなければならない．さて，任意に実数 t を与え，級数(9)の項の順序を並べ換えて，新たに得られる級数の和の値が t に等しくなるようにしよう．級数(9)のつくり換えは次のような手順で行う．まず，p_1 を

$$t_p > t$$

を満たす p の最小値とする．つぎに，q_1 を

$$t_{p_1} + t_q' < t$$

を満たす q の最小値とする．これらの初期値 p_1 と q_1 から出発して，帰納的に，つまり p_n と q_n は与えられたものとして，次の2つの単調増大自然数列をつくる．

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots \tag{10}$$

$$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n,\ \cdots \tag{11}$$

ここで，p_{n+1} と q_{n+1} は次のようにして定める．すなわち p_{n+1} を

$$t_p + t_{q_n}' > t$$

を満たす p の最小値とし，q_{n+1} を

$$t_{p_{n+1}} + t_q' < t$$

を満たす q の最小値とする．級数(9)は収束するから，級数の項は n が大きくなると零に収束する．このことから容易に示せるように，数列(10)と(11)について

$$\lim_{n\to\infty}(t_{p_n} + t_{q_n}') = t$$

が成り立つ．ところで，$t_{p_n} + t_{q_n}'$ は次の形に書くことができる．

$$t_{p_1} + t_{q_1}' + (t_{p_2} - t_{p_1}) + (t_{q_2}' - t_{q_1}') + \cdots + (t_{p_n} - t_{p_{n-1}}) + (t_{q_n}' - t_{q_{n-1}}') \tag{12}$$

この式の各項はそれぞれ級数(9)のいくつかの項の和であり，しかも級数(9)のどの項も式(12)の2つ以上の項の中には入ってこない，また級数(9)のどの項も n を大きくすれば式(12)のいずれかの項の中に入ってくる．したがって，式(12)の各項をそれぞれ級数(9)の対応している項の和に置き換えると，級数(9)のすべての項を含む新しい級数が得られる．しかしこの級数の項は新しい順序で並べられている．このようにして得られた新しい級数は，和の値が与えられた実数 t になっており，しかも級数(9)から項の順序を並べ換えることによってつくられたものである．

例2　ここでは例1で述べたことが実際に生じる実数項級数の実例をあげよう．それは次の級数である．

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots \tag{13}$$

t_k と $|t_k'|$ は両方とも同時に有界になるかあるいは両方とも同時に無限大になるかいずれかであるから，前者が無限大になることを証明するためには，両者の和が無限大になることを証明すれば十分である．すなわち

$$\lim_{n\to\infty}(t_k + |t_k'|) = \infty$$

を証明すればよい．したがって，級数(*13*)に対して

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{14}$$

が発散すること，つまりこの級数の和が $+\infty$ になることを証明すればよい．級数(*14*)の仕切られた部分で

$$2^{l-1} < n \leqq 2^l$$

を満たす番号 n の項からなるものを考える．ただし，l は自然数である．この部分に入る項の個数は 2^{l-1} で，最後の最小の項は $\dfrac{1}{2^l}$ である．したがって，この部分の項の和は $\dfrac{2^{l-1}}{2^l} = \dfrac{1}{2}$ より大きい．級数(*14*)の第1項だけを除いて得られる級数は，互いに交差しないこのような形の部分に分解される．ただし，l は1から ∞ まで変えるものとする．これより級数(*14*)の和は無限大になることが得られる．

以上により，級数(*13*)に対して，t_n は無限大になるから，例1で証明されたことによって，級数(*13*)の項の順序を並べ換えて，新たに得られる級数の和の値が与えられた実数 t に等しくなるようにできる．

例3　次の2つの級数は収束するものとする．

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{15}$$

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots \tag{16}$$

前者の和を s，後者の和を t とする．このとき，この2つの級数は項別に加えることができる．すなわち，

$$(z_1 + w_1) + (z_2 + w_2) + \cdots + (z_n + w_n) + \cdots \tag{17}$$

は $s + t$ に収束する．このことを証明しよう．

まず，それぞれの級数の部分和をつくる．それらを

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

$$t_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

とする．級数(*15*)，(*16*)は収束するから，任意の正の数 δ に対して，適当に大きな自然数 ν を見つけて，$n > \nu$ ならば

$$|s_n - s| < \frac{\delta}{2};\quad |t_n - t| < \frac{\delta}{2}$$

が成り立つようにできる．明らかに，級数(17)の番号 n の部分和は $s_n + t_n$ に等しい．ところで，$n > \nu$ のとき

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| < \delta$$

であるから，級数(17)は $s + t$ に収束する．

6．絶対収束級数

級数

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{1}$$

が**絶対収束**するというのは，絶対値からつくられた級数，つまりきちんというと，この級数の項の絶対値を項とする級数

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots \tag{2}$$

が収束することである．

まず最初に証明しなければならないのは，絶対収束級数は普通の意味で収束するということである．この証明にはコーシーの収束判定法を用いる．仮定により級数(2)は収束するから，任意の正の数 δ に対して，ある大きな自然数 ν が存在して，$q > p > \nu$ ならば

$$|z_{p+1}| + |z_{p+2}| + \cdots + |z_q| < \delta$$

が成り立つ．ところが

$$|z_{p+1} + z_{p+2} + \cdots + z_q| \leqq |z_{p+1}| + |z_{p+2}| + \cdots + |z_q| < \delta$$

であるから，コーシーの収束判定法の条件が級数(1)に対して成り立つことがわかる．ゆえに，級数(1)は収束する．

この証明に見られる単純な考えをそのまま用いると，絶対収束級数の重要な性質がもう1つ得られる．それは，普通の収束級数に対しては，一般に成り立たないものである．級数(1)が絶対収束するならば，任意の正の数 δ に対して，大きな自然数 ν を適当にとって，自然数 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ がどれも ν より大きいならば，不等式

$$|z_{p_1} + z_{p_2} + \cdots + z_{p_k}| < \delta \tag{3}$$

が成り立つようにできる．ここで，ν は，級数(2)にコーシーの収束判定法を適用したときに正の数 δ に対応して定まる自然数である．

この性質を証明するには，次の不等式を確かめてみれば十分である．

$$|z_{p_1}+z_{p_2}+\cdots+z_{p_k}| \leqq |z_{p_1}|+|z_{p_2}|+\cdots+|z_{p_k}|$$
$$\leqq |z_{p+1}|+|z_{p+2}|+\cdots+|z_q| < \delta$$

ただし，$p+1=p_1$，$q=p_k$ である．

項の順序に対する無関係性　　さて今度は，絶対収束級数の和の値は，級数の項の順序に無関係であることを証明しよう．証明するために，まず，級数

$$z_1'+z_2'+\cdots+z_n'+\cdots \tag{4}$$

を，級数(*1*)の項の順序を並べ換えて得られた級数とする．これら 2 つの級数の部分和をつくり，それらをそれぞれ

$$s_n=z_1+z_2+\cdots+z_n,\quad s_n'=z_1'+z_2'+\cdots+z_n'$$

とする．つぎに，任意の正の数 δ を与え，大きな自然数 ν を適当に選び，$n>\nu$ ならば不等式

$$|s_n-s|<\delta \tag{5}$$

が成り立つようにする．しかもこの ν に対して不等式(*3*)も成り立つようにする．いま $n=\nu+1$ とおいて n を固定する．そうすると s_n は 1 つの定まった数となるから，ある大きな自然数 ν' が存在して，部分和 $s_{\nu'}'$ は，部分和 s_n に入っている級数(*1*)のすべての項を含むようになる．$n'>\nu'$ ならば，部分和 $s_{n'}'$ もまた，部分和 s_n に入っている級数(*1*)のすべての項を含む．したがって不等式(*3*)により

$$|s_{n'}'-s_n|<\delta \tag{6}$$

が成り立つ．したがって，不等式(*5*)と(*6*)から

$$|s_{n'}'-s|<2\delta$$

が $n'>\nu'$ のときに成り立つことになる．さて，任意の正の数 ε に対して，$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ とおく．これで，正の数 ε が与えられたとき，自然数 ν' を適当に見つけて，$n'>\nu'$ ならば不等式

$$|s_{n'}'-s|<\varepsilon$$

が成り立つようにできることが証明された．これは，級数(*4*)自体の和が級数(*3*)の和 s と同じであることを意味している．

これで，絶対収束級数の和の値は，級数の項の順序に無関係なことが証明された．

級数の乗法　　2 つの有限和の積を求めるためには，第 1 の和の各項と第 2

の和の各項との積を求め，これらの積全部の和を求めればよい．この乗法の規則は絶対収束級数についても有効であることを証明しよう．このことの証明のために，2つの絶対収束級数を

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_n + \cdots \tag{7}$$

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots \tag{8}$$

とする．ここでは，級数の第1項の番号は0とし，1としないことにする．このようにするのはとくに意味があるわけではないが，以下で級数を扱うときに都合がよいからである．これらの級数の部分和をそれぞれ

$$s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n\,;\quad t_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$

とする．また，絶対値級数の部分和をそれぞれ

$$\hat{s}_n = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n|$$

$$\hat{t}_n = |t_0| + |t_1| + \cdots + |t_n|$$

とする．さらに

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,\quad \lim_{n\to\infty} t_n = t$$

とおく．さて，級数(7)の各項と級数(8)の各項の積，つまり $z_p w_q$ の型の積をつくり，つぎにこれらの積全部を1行に並べてそれらに番号を付けてから，これらの積全部を項とする級数をつくる．このつくり方にはいろいろな方法がある．一例をあげてみよう．

$$z_0w_0 + (z_1w_0 + z_0w_1) + (z_2w_0 + z_1w_1 + z_0w_2) + \cdots$$
$$+ (z_nw_0 + z_{n-1}w_1 + \cdots + z_0w_n)$$

ここでは，1つのグループに $p + q = n$ を満たす積 z_pw_q が全部含まれており，このグループでは，項は q が0から n に変わる順に並んでいる．何らかの方法で番号の付けられた積 z_pw_q を項とする級数を

$$g_0 + g_1 + \cdots + g_n + \cdots \tag{9}$$

とする．この級数の部分和を

$$h_m = g_0 + g_1 + \cdots + g_m$$

で表す．さて，まずはじめに次のことを証明する．級数(9)は絶対収束する．したがって，級数(9)は和をもち，和を h で表せば

$$\lim_{m\to\infty} h_m = h$$

である．そして終りに

$$h = st$$

となることを示す.

以上のことを証明しよう. 級数(*9*)の絶対値級数の部分和をつくる.

$$\hat{h}_m = |g_1| + |g_2| + \cdots + |g_m|$$

部分和 $\hat{h}_m$ は $|z_p w_q|$ の型の項の有限個の和であるから, 与えられた m に対して適当に n を大きくとれば, $\hat{h}_m$ のどの項も部分和 $\hat{s}_n$ と $\hat{t}_n$ の積をつくったときに生じる $\hat{s}_n$ の項と $\hat{t}_n$ の項の積のいずれかになっている. したがってすぐわかるように

$$\hat{h}_m \leqq \hat{s}_n \hat{t}_n$$

となる. 右辺の 2 つの因数は両方とも n について有界であるから, 部分和 $\hat{h}_m$ もまた m について有界である. ゆえに, 級数(*9*)は絶対収束する. さらに明らかに, 部分和 h_m の $z_p w_q$ の型のどの項も部分和 s_n と t_n の積をつくったときに生じる s_n の項と t_n の項の積のいずれかになっている. したがって, 差 $s_n t_n - h_m$ は次のように書ける.

$$s_n t_n - h_m = g_{p_1} + g_{p_2} + \cdots + g_{p_k}$$

ここで, 番号 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ はすべて m より大きい. 前に証明されたこと ((*3*)参照) により, 与えられた正の数 δ に対して十分大きな自然数 ν を適当に見つけて, $\nu < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ ならば不等式

$$|g_{p_1} + g_{p_2} + \cdots + g_{p_k}| < \delta$$

が成り立ち, しかも, $n > \nu$ ならば不等式

$$|s_n - s| < \delta, \quad |t_n - t| < \delta$$

も成り立つようにできる. このことから

$$\lim_{n\to\infty} h_m = \lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$$

が得られる. これで, 絶対収束級数に対する乗法の規則が証明された.

初等代数の 1 つの基本公式　ここで, 代数の基本公式を 1 つ証明しよう. この公式は以下でよく使うものであり, とくに, 等比数列の和を求めるときに使う. 公式を記述し, それを証明するために, 次の型の積を全部加えて得られる 2 変数 z と w の多項式を $f_k(z, w)$ で表す.

$$z^p w^q \tag{10}$$

ただし, p と q は負でない整数で, p と q の和は k である. すなわち

$$f_k(z,\ w) = z^k + z^{k-1}w + z^{k-2}w^2 + \cdots + zw^{k-1} + w^k$$

とする．さて目的の公式は次の式である．

$$z^n - w^n = (z - w)f_{n-1}(z,\ w) \tag{11}$$

これを証明するために，まず，$f_{n-1}(z,\ w)$ に z を掛ける．明らかにこの積は(*10*)の型の項を，w^n を除いて全部含んでいる．したがって

$$f_{n-1}(z,\ w)z = f_n(z,\ w) - w^n \tag{12}$$

全く同じように

$$f_{n-1}(z,\ w)w = f_n(z,\ w) - z^n \tag{13}$$

(*13*)を(*12*)からひくと

$$f_{n-1}(z,\ w)(z - w) = z^n - w^n$$

が得られる．この式は公式(*11*)にほかならない．

等比数列の和　ここでは，公式(*11*)を応用して次の等比数列の和を求めてみよう．

$$s_n = a + aw + \cdots + aw^n \tag{14}$$

ただし，a と w は複素数である．

明らかに，$s_n = af_n(1,\ w)$ である．これより公式(*11*)を使うと

$$s_n = \frac{a(1 - w^{n+1})}{1 - w} \tag{15}$$

が得られる．

この公式(*15*)は，次の等比級数の和を求めるのに使うことができる．

$$a + aw + aw^2 + \cdots + aw^n + \cdots \tag{16}$$

ただし，$|w| < 1$ とする．上の s_n ((*14*)参照) は級数(*16*)の部分和になっている．したがって公式(*15*)によって，$|w| < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1 - w} \tag{17}$$

となる（2節，(*12*)参照)．

絶対収束の優級数判定法　ここでは，級数が絶対収束するための十分条件を与えている1つの重要な判定法について述べる．級数

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_n + \cdots \tag{18}$$

については，項は実数または複素数とする．また，これと平行して考える級数

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \tag{19}$$

については，項は正の実数とする．

このとき，級数(19)が収束し，不等式

$$|z_n| \leqq c_n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

が成り立つならば，級数(18)は絶対収束する．この判定法の証明はたいへんやさしいので，改めて述べる必要はないと思う．ただ補足的なこととして，これら2つの級数の和の間に次のような重要な関係があることを注意しておく．すなわち，級数(18)の和を s とし，級数(19)の和を v とすると，不等式

$$|s| \leqq v$$

が成り立つ．

級数(19)の特別の場合としてとくに重要なのは，等比級数

$$a + a\alpha + a\alpha^2 + \cdots + a\alpha^n + \cdots \tag{20}$$

である．ただし，a も α も正の実数で，しかも $\alpha < 1$ である．級数(20)の収束性はすでに証明されている．((17)参照)．また，級数(20)の和 v は

$$v = \frac{a}{1 - \alpha} \tag{21}$$

である．したがって，級数(18)について，条件

$$|z_n| \leqq a\alpha^n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{22}$$

が満たされるならば，級数(18)は絶対収束し，和 s は次の不等式で評価される．

$$|s| \leqq \frac{a}{1 - \alpha} \tag{23}$$

不等式(22)は簡潔に

$$z_n = O(\alpha^n) \tag{24}$$

と書き表すことができる（2節参照）．したがって，この条件(24)は級数(18)が絶対収束するための十分条件である．

例 1　ここで公式を1つ述べよう．それは，証明がいま説明したばかりの絶対収束に関する判定法のよい応用例になっているものである．しかも，この公式自体は次の節で重要な応用をもつものである．さて，$c(k)$ を自然数 k の有界関数とする．すなわち，次の条件を満たす関数とする．

$$|c(k)| < c$$

ここで，c は k に無関係な定数である．このとき，次の極限公式が成り立つ．

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{c(k)}{k^2}\right)^k=1 \tag{25}$$

証明のために，まず極限記号のあとにおかれた式をニュートンの２項定理（２節，(10)参照）を用いて展開する．

$$\left(1+\frac{c(k)}{k^2}\right)^k=1+z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots$$

ただし，

$$z_n=\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\left(\frac{c(k)}{k^2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{n!}\cdot\frac{k}{k}\cdot\frac{k-1}{k}\cdots\frac{(k-n+1)}{k}\cdot\left(\frac{c(k)}{k}\right)^n$$

ニュートンの２項定理では項の数は有限個であるが，この展開式は項の数が無限個の場合にも成り立つことに注意しておく．

すぐわかるように，

$$|z_n|\leqq\left(\frac{c}{k}\right)^n$$

である．したがって，$k>c$ のとき，式(23)によって，不等式

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqq\frac{\dfrac{c}{k}}{1-\dfrac{c}{k}}=\frac{c}{k-c}$$

が成り立つ．これから，$k\to\infty$ のとき，$z_1+z_2+\cdots+z_n$ は零に収束することがわかる．これで極限公式(25)が証明された．なお，この極限公式は次のように書きなおすことができる．

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^k=1$$

例2　次の級数は収束することを証明しよう．

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \tag{26}$$

証明のために，まず，補助の級数をつくる．それは，各項が級数(26)の各項より大きく，しかもその収束性が容易に確かめられるものである．次の級数はこのような級数である．

$$1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\cdots \tag{27}$$

第 n 項について

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

となる．この式を用いて級数(*27*)の各項を書き換えると次の形の級数が得られる．

$$1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots$$

明らかに，この級数の和は 2 である．したがって，

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

であるから，級数(*27*)の収束性から級数(*26*)の収束性が得られ，さらに級数(*26*)の和は 2 以下である．

7. 指数関数 exp(z)

解析学で大きな役割を演じているのは複素変数 z の指数関数 $\exp(z)$ で，それは次の級数で定義される．

$$\exp(z) = \frac{1}{0!} + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (1)$$

この級数は z のすべての値に対して絶対収束する．なぜなら

$$\frac{|z|^n}{n!} = O(\gamma^n) \qquad (2)$$

で，$\gamma < 1$ であり，これは級数(*1*)の絶対収束性のための十分条件にほかならないからである（2 節，(*19*)と 6 節，(*24*)参照）．

指数関数 exp(z) の基本性質　ここで指数関数 $\exp(z)$ のいくつかの基本性質について述べよう．まず明らかに

$$\exp(0) = 1 \qquad (3)$$

である．

ついで，指数関数 $\exp(z)$ の最も重要な性質は次の等式である．

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \qquad (4)$$

ただし，z と w は任意の複素数である．等式(4)を証明するため，定義により

$$\exp(w)=\frac{1}{0!}+\frac{w}{1!}+\frac{w^2}{2!}+\cdots+\frac{w^n}{n!}+\cdots \tag{5}$$

と書く．級数(1)と(5)は両方とも絶対収束するから，両者の積を求めるためには，それらの項別掛け算を行えばよい（6節参照）．すなわち，

$$\frac{1}{p!q!}z^p w^q \tag{6}$$

の型の積を，負でない整数 p，q 全部についてつくり，それらを全部加えればよい．そこでまず負でない整数 n を固定し，$p+q=n$ を満たす(6)の型の積全部の和を求める．この和を $n!$ に掛ける．このようにして得られた和は

$$\frac{n!}{p!q!}z^p w^q \tag{7}$$

の形の項からできている．ただし，$p+q=n$ で，p と q は負でない整数である．ニュートンの2項定理により，(7)の形の項全部の和は

$$(z+w)^n$$

に等しい．級数(1)と(5)の積の級数は，上でつくられた(6)の形の項の和全部からできており，しかも(7)の形の項の和を得るために，前者の和を $n!$ に掛けたのであるから，級数(1)と(5)の積について明らかに

$$\exp(z)\cdot\exp(w)=\frac{1}{0!}+\frac{z+w}{1!}+\frac{(z+w)^2}{2!}+\cdots+\frac{(z+w)^n}{n!}+\cdots=\exp(z+w)$$

が成り立つ（(1)参照）．

これで基本等式(4)が証明された．さて，(3)と(4)から

$$\exp(-z)=\frac{1}{\exp(z)} \tag{8}$$

が得られる．実際

$$1=\exp(0)=\exp(z+(-z))=\exp(z)\cdot\exp(-z)$$

であるから，$\exp(z)\cdot\exp(-z)=1$ となる．これは(8)が成り立つことを意味している．

また，(4)と(8)からただちに

$$\exp(w-z)=\frac{\exp(w)}{\exp(z)} \tag{9}$$

が得られる．

また，$z=w$ として(4)を繰り返し用いると

$$\exp(kw)=(\exp(w))^k$$

が得られる．ここで，k は自然数である．この等式と(3)および(8)とから，任意の整数 k に対して

$$\exp(kz)=(\exp(z))^k \tag{10}$$

が成り立つ．

今度は次のことを証明しよう．

$$|z|=\alpha<1 \quad のとき \quad |\exp(z)-1| \leqq \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad が成り立つ． \tag{11}$$

実際，

$$\exp(z)-1=\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \tag{12}$$

である．$|z|=\alpha<1$ のとき，$\dfrac{|z|^n}{n!}\leqq \alpha^n$ となる．したがって，(12)の右辺の級数の和の絶対値は $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ を越えない（6 節，(23)参照）．これで(11)の不等式が証明された．

つぎに，(11)から，$|w-z|=\alpha<1$ のとき

$$|\exp(z)-\exp(w)| \leqq |\exp(z)|\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{13}$$

となることがわかる．実際，(9)から

$$\exp(w)-\exp(z)=\exp(z)\cdot(\exp(w-z)-1)$$

が得られる．ゆえに，これと(11)によって，不等式(13)が成り立つ．

最後に，不等式(13)から，指数関数 $\exp(z)$ は連続関数（1 節，例 1 参照）であることがわかる．実際，z_0 を任意の複素数とし，z_1，z_2，…，z_n，…を複素数列で

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

となるものとする．不等式(13)によって，十分大きい n に対して

$$|\exp(z_n) - \exp(z_0)| \leqq |\exp(z_0)| \cdot \frac{|z_n - z_0|}{1 - |z_n - z_0|}$$

が成り立つ．ここで，$n \to \infty$ のときの極限を求めると

$$\lim_{n \to \infty} \exp(z_n) = \exp(z_0)$$

が得られる．ゆえに，指数関数 $\exp(z)$ は変数 z の任意の値 z_0 において連続である．

実数 $z = x$ に対する指数関数 $\exp(z)$　ここでは，変数 z の値が実数 x である場合の指数関数 $\exp(z)$ の性質について述べよう．まず第1に，明らかに，$\exp(x)$ は実数 x に対して実数で，しかも正である．実際，級数(*1*)の項の係数はすべて実数で，しかも正である．したがって，$\exp(x)$ は実数で，しかも $x \geqq 0$ のとき正である．一方，$x < 0$ のときも $\exp(x)$ が正になることは，(*8*)から得られる．ゆえに

$$\exp(x) > 0$$

である．

数学において，指数関数の値 $\exp(1)$ は本当に特別な役割を果たしている．この数は，e という特別な文字で表されており，定義式(*1*)から

$$e = \exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \qquad (14)$$

となる．数学における数 e の役割は並外れて大きいので，e の数値は高い精度で計算されている．e の数値を小数第5位まで書くと，次のとおりである．

$$e \fallingdotseq 2.71828$$

さて，(*10*)と(*14*)から，任意の整数 k に対して

$$\exp(k) = e^k \qquad (15)$$

となる．しかしさらに，任意の有理数 r に対しても

$$\exp(r) = e^r \qquad (16)$$

が成り立つ．実際，(*10*)で $k = l$，$lz = x$ とおけば，この等式から

$$\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{l}\right)\right)^l \qquad (17)$$

が得られる．$\exp(x)$ と $\exp\left(\frac{x}{l}\right)$ は両方とも正の数であるから，(*17*)より

$$\exp\left(\frac{x}{l}\right) = (\exp(x))^{\frac{1}{l}}$$

となる．ここで，当然のことであるが，右辺の累乗根は正の累乗根をとるものとする．この等式で $x = k$ とおいて，(*15*)を用いると

$$\exp\left(\frac{k}{l}\right) = (\exp(k))^{\frac{1}{l}} = (e^k)^{\frac{1}{l}} = e^{\frac{k}{l}}$$

が得られる．$\dfrac{k}{l}$ は有理数であるから，これで等式(*16*)が証明された．

等式(*16*)の右辺に，r が有理数の場合の数 e の累乗 e^r が書かれている．この累乗は初等代数の規則を用いて定義したものである．すなわち，はじめに r が自然数の場合 r 個の積として定義し，r が負の整数と分数の場合は，自然数の場合をもとにして，逆数と累乗根を用いて定義したものである．したがって，r が有理数のとき，$\exp(r)$ は，初等代数のわかりやすい式によって表されたことになる．さて，今度は有理数 $x = r$ に対して定義された関数 e^x を，すべての実数 x に拡大し，拡大した関数が実変数 x の連続関数になるようにできることを示そう．実際，このような拡大は

$$e^x = \exp(x) \tag{18}$$

とおくことによって得られる．有理数 $x = r$ のとき，この等式は(*16*)によって成り立つ．一方，(*18*)の右辺の関数はすべての実数 x に対して定義されており，しかも連続である．したがって，(*18*)によって関数 e^x はすべての実数 x に拡大される．

有理数 $x = r$ に対して定義された関数 e^x を，実数全体に拡大し，拡大した関数が連続になるようにできたが，このような拡大はここで述べたものだけでそれ以外に存在しない．このことは容易に確かめられる．実際，x_0 を任意の実数とする．このとき，有理数列

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots$$

で，

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x_0$$

を満たすものが存在する．関数 e^x は，$x = x_0$ で連続になるように拡大したのであるから，

$$\lim_{n\to\infty} e^{r_n} = e^{x_0}$$

となる．この等式の左辺において e^{r_n} の代わりに $\exp(r_n)$ を代入すると，関数 $\exp(x)$ の連続性から

$$\lim_{n\to\infty}\exp(r_n)=\exp(x_0)$$

となる．ゆえに，$e^{x_0}=\exp(x_0)$ である．

これで，次の等式が証明された．すべての実数 x に対して

$$e^x=\exp(x)=\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (19)$$

が成り立つ．これは深い内容をもった等式である．この等式は，実数 x に対して，元来代数的に定義された e^x を級数(*19*)で表したもので，これによって e^x の値を高い精度で計算することが可能となる．

純虚数 $z=iy$ に対する指数関数 $\exp(z)$　　上では，実数 $z=x$ に対する指数関数 $\exp(z)$ について研究してきた．ここでは，純虚数 $z=iy$（y は実数）に対する指数関数 $\exp(z)$ について研究しよう．次の特筆すべき素晴らしい公式が成り立つ．

$$\exp(iy)=\cos y+i\sin y \qquad (20)$$

ここで，$\cos y$ と $\sin y$ は，三角法で定義された関数で，初等数学のよく知られた関数である．ただし，角 y は弧度法で測る．

この公式の証明をしよう．まず最初に，$\exp(z)$ の定義の級数(*1*)で，$z=iy$ とおこう．このとき，級数(*1*)は2つの型の項を含む．1つは係数に虚数単位 i を含まない実数項であり，いま1つは i を含む純虚数項である．$z=iy$ に対する級数(*1*)の項を置き換え，実数項と純虚数項をそれぞれまとめて，このようなことは級数が絶対収束するからできるのであるが，次の2つの級数が得られる．

$$f(y)=1-\frac{y^2}{2!}+\cdots+(-1)^m\frac{y^{2m}}{(2m)!}+\cdots \qquad (21)$$

$$g(y)=y-\frac{y^3}{3!}+\cdots+(-1)^m\frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots \qquad (22)$$

級数 $\exp(z)$ は絶対収束するから，級数(*21*)と(*22*)もまた絶対収束し，5節の結果（例3参照）によって，これらは項別に加えることができる．ゆえに

$$\exp(iy)=f(y)+ig(y)$$

したがって，公式(*20*)の証明がすめば，

$$\cos y=f(y)\,;\quad \sin y=g(y) \qquad (23)$$

が証明されたこと，すなわち，三角関数 $\cos y$ と $\sin y$ のべき級数展開が得ら

れたことになる．なお，これらのべき級数は任意の y に対して絶対収束するが，それは級数(*1*)が絶対収束するからである．

つぎに公式(*20*)を証明するために，級数(*21*)と(*22*)をもとにして，y が小さいとしたときの関数 $f(y)$ と $g(y)$ に対する近似式をつくる必要がある．さて，$|y| < \frac{1}{2}$ とする．級数(*21*)の第2項以後の項の絶対値は，等比級数

$$|y|^2 + \cdots + |y|^{2m} + \cdots$$

の各項より大きくないし，また，級数(*22*)の第2項以後の項の絶対値は，等比級数

$$|y|^3 + \cdots + |y|^{2m+1} + \cdots$$

の各項より大きくない．第1の等比級数の和について

$$\frac{|y|^2}{1-|y|^2} < \frac{|y|^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}|y|^2$$

が成り立ち（6節，(*23*)参照)，第2の等比級数の和について

$$\frac{|y|^3}{1-|y|^2} < \frac{|y|^3}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}|y|^3$$

が成り立つ．したがって，$f(y)$ と $g(y)$ に対して，$|y| < \frac{1}{2}$ のとき

$$|f(y)-1| < \frac{4}{3}|y|^2; \quad |g(y)-y| < \frac{4}{3}|y|^3 \tag{24}$$

が得られる．

ところで，公式(*20*)の証明の方針は次のとおりである．(*10*)から

$$\exp(i\beta) = \left(\exp\left(\frac{i\beta}{k}\right)\right)^k = (\exp(i\alpha))^k$$

となる．ただし，$\alpha = \frac{\beta}{k} = O\left(\frac{1}{k}\right)$ である．$O\left(\frac{1}{k}\right)$ は，β が k に無関係だからである．また，ここでは k は自然数ではあるが，偶数としておく．複素数 $\exp(i\alpha) = f(\alpha) + ig(\alpha)$ を，不等式(*24*)を用いて近似的に表すと

$$f(\alpha) = 1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right); \quad g(\alpha) = \alpha + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \tag{25}$$

が得られる．$f(\alpha) + ig(\alpha)$ を k 乗して，$k \to \infty$ のときの極限をとると，一連の計算の結果

$$\lim_{k\to\infty}(\exp(i\alpha))^k = \cos\beta + i\sin\beta \tag{26}$$

が得られる．ここで $y=\beta$ とおけば公式(20)が証明されたことになる．

さて，複素数 $\exp(i\alpha)$ を極形式で書く．すなわち

$$f(\alpha) + ig(\alpha) = \rho(\cos\delta + \sin\delta)$$

とおく．ただし，ρ と δ は，$\alpha = \dfrac{\beta}{k}$ の関数，つまるところ偶数 k の関数である．そうすると

$$(\exp(i\alpha))^k = \rho^k(\cos(k\delta) + i\sin(k\delta))$$

であるから（はじめに，(14)，(17)参照），(26)を証明するには次の2つの極限の式を証明すればよい．

$$\lim_{k\to\infty}\rho^k = 1 \tag{27}$$

$$\lim_{k\to\infty}k\delta = \beta \tag{28}$$

近似式(25)を用いると，容易に

$$\rho^2 = (f(\alpha))^2 + (g(\alpha))^2 = \left(1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^2 + \left(\alpha + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)^2$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

が得られる．さらに，

$$\delta = \arctan\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}$$

比 $\dfrac{g(\alpha)}{f(\alpha)}$ の近似式を求めるために，次のように計算する．

$$\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)} - \alpha = \frac{\alpha + O\left(\frac{1}{k^3}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)} - \alpha = \frac{\alpha + O\left(\frac{1}{k^3}\right) - \alpha - \alpha\cdot O\left(\frac{1}{k^2}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)}$$

$$= \frac{O\left(\frac{1}{k^3}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)} = O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

ゆえに，

$$\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)} = \alpha + O\left(\frac{1}{k^3}\right) = \gamma$$

しかも，$\gamma = O\left(\frac{1}{k}\right)$．したがって

$$\delta = \arctan\gamma = \frac{\arctan\gamma}{\gamma}\cdot\left(\alpha + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) \tag{29}$$

これで，ρ^2 と δ の近似式を用いると，(*27*)と(*28*)は容易に証明される．実際，

$$\lim_{k\to\infty}\rho^k = \lim_{k\to\infty}(\rho^2)^{\frac{k}{2}} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^{\frac{k}{2}} = \lim_{l\to\infty}\left(1 + O\left(\frac{1}{l^2}\right)\right)^l$$

ただし，$l = \frac{k}{2}$．6 節の極限公式(*25*)から

$$\lim_{l\to\infty}\left(1 + O\left(\frac{1}{l^2}\right)\right)^l = 1$$

よって，極限の式(*27*)が証明された．最後に，(*29*)を用いると

$$\lim_{k\to\infty} k\delta = \lim_{k\to\infty}\frac{\arctan\gamma}{\gamma}\left(k\alpha + kO\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\arctan\gamma}{\gamma}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(k\alpha + kO\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)$$

2 節の(*25*)から

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\arctan\gamma}{\gamma} = 1$$

一方，

$$\lim_{k\to\infty}\left(k\alpha + kO\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\beta + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \beta$$

よって，極限の式(*28*)が証明された．

これで(*26*)が証明され，したがって，基本公式(*20*)が証明された．

例 1　級数(*1*)で定義した指数関数を，ここでは，別の仕方で定義してみよう．すなわち，次の等式が成り立つことを示そう．

$$\exp(z) = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{z}{k}\right)^k \tag{30}$$

これを証明するため，極限記号のあとにおかれた式をニュートンの 2 項定理（2 節，(*10*)参照）で展開する．そうすると

$$\left(1 + \frac{z}{k}\right)^k = 1 + \frac{k}{1!}\cdot\frac{z}{k} + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\cdot\frac{z^n}{k^n} + \cdots \tag{31}$$

となる．級数(*1*)の第 m 項は

$$z_m = \frac{z^m}{m!}$$

である．また，(31)の第 m 項は

$$z_m^* = l_m(k)\frac{z^m}{m!}$$

である．ただし，

$$l_m(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{k^m}$$

で，これについて

$$0 \leqq l_m(k) < 1 \tag{32}$$

$$\lim_{k\to\infty} l_m(k) = 1 \tag{33}$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned} &|(z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots) - (z_{n+1}^* + z_{n+2}^* + \cdots)| \\ &\qquad \leqq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots = \delta_n \end{aligned} \tag{34}$$

が得られる．級数(1)は絶対収束するから

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \tag{35}$$

である．つぎに

$$\begin{aligned} s_n &= z_0 + z_1 + \cdots + z_n \\ s_n^* &= z_0^* + z_1^* + \cdots + z_n^* \end{aligned} \tag{36}$$

とおく．(33)と(34)から

$$|s_n - s_n^*| = \varepsilon_k(n) \tag{37}$$

は，n を固定したとき

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k(n) = 0 \tag{38}$$

となる．(34)，(36)，(37)から

$$\left|\left(1 + \frac{z}{k}\right)^k - \exp(z)\right| \leqq \delta_n + \varepsilon_k(n) \tag{39}$$

が得られる．

さて，小さい正の数 α を与え，$\delta_n < \dfrac{\alpha}{2}$ を満たす大きい n をとる（(35)参照）．この n を固定し，これに対し，自然数 ν を適当に選んで，$k > \nu$ ならば

$\varepsilon_k(n) < \dfrac{\alpha}{2}$ となるようにできる（(38)参照）．このような k に対して(39)から

$$\left|\left(1 + \frac{z}{k}\right)^k - \exp(z)\right| < \alpha \tag{40}$$

が得られる．したがって，任意の正の数 α に対して，自然数 ν を適当に見つけ，$k > \nu$ ならば不等式(40)が成り立つようにできる．すなわち，等式(30)が成り立つ．

また，たいへん興味深い結果が，等式(30)で $z = 1$ とおくことによって得られる．すなわち，

$$e = \lim_{k \to \infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

が成り立つ．なお，注意しておくが，この式で数 e は当初定義されていたのである．

8. 基本超越関数

基本超越関数と見なされているのは，正の数 a を底とする指数関数 a^x，三角関数 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$ と，これらの逆関数 $\log_a x$，$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\mathrm{arccot}\, x$ である．

前節で，$\exp(z)$ を用いて，e^x，$\cos x$，$\sin x$ のべき級数展開が得られた．すなわち，

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{2}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{3}$$

である（7節，(19)，(21)～(23)参照）．しかも，これらの級数はすべての実数 x に対して絶対収束する．

このように，$\exp(z)$ を用いて，3つの非常に重要な実変数の関数，e^x，$\cos x$，$\sin x$ の，x のべき級数展開が得られたのである．これら3つの関数のい

ずれも，定義自体によって変数の値が実数の場合のみ意味をもつ．

しかし，級数(*1*)〜(*3*)は，これを用いるとこれらの関数が計算できるのであるが，何よりも絶対収束しているので，これらの級数は複素数に対しても収束する．だから，実変数 x の代わりに複素変数 z を代入することができて，最初変数の値が実数の場合のみに定義されていたこれらの関数は，今度は，変数の値が複素数の場合にも定義されていると見なすことができる．したがって，定義により次のように書くことができる．

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{4}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{5}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{6}$$

こうして，級数を用いることによって，実数に対してだけ定義されていた関数を，複素数全体にうまく拡大することができた．そこで次のような問題が生まれてくる．このような複素数全体への拡大はこれだけであるか．すなわち，e^z，$\cos z$，$\sin z$ は，級数を用いてこれ以外の拡大を求めることができるか．次の9節で，このことは不可能であること，すなわち，実変数関数の，べき級数による複素数全体への拡大はただ1通りしかありえないことを証明する．

さて，7節の式(*1*)とこの節の式(*4*)から

$$e^z = \exp(z) \tag{7}$$

が得られる．したがって，e^z には次の性質がある．

$$e^0 = 1 \tag{8}$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{9}$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z} \tag{10}$$

$$e^{w-z} = \frac{e^w}{e^z} \tag{11}$$

(7節，(*3*)，(*4*)，(*8*)，(*9*)参照．) さらに，e^z は連続である．なぜなら $\exp(z)$ は連続だからである．また，級数(*5*)と(*6*)を用いて得られた関数 $\cos(z)$ と $\sin(z)$ は新しい複素変数関数であるが，これらは関数 $e^z = \exp(z)$ と密接な関係がある．すなわち，級数(*4*)で z の代わりに iz を代入し，(*5*)

および(*6*)と対比すると，次の恒等式が得られる．

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{12}$$

この恒等式を7節の等式(*20*)から導くには無理がある．7節の(*20*)は，実数に対してだけ証明された等式であるのに，この(*12*)は，任意の複素数に対して成り立つ等式だからである．つぎに，(*5*)と(*6*)から

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin z = -\sin z$$

が得られる．したがって，$\cos z$ は偶関数であり，$\sin z$ は奇関数である．これらの等式を用いて，(*12*)の z を $-z$ で置き換えると

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{13}$$

が得られる．(*12*)と(*13*)を，$\cos z$ と $\sin z$ について解くと次の等式が得られる．

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{14}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i} \tag{15}$$

このように，いま新しく構成された複素変数 z の関数 $\cos(z)$ と $\sin(z)$ は，複素変数 z の関数 e^z によって簡潔に表される．

複素変数関数の $\cos z$ と $\sin z$ の加法定理については，ここで改めて証明する必要がある．しかし，証明は(*14*)と(*15*)をもとに(*9*)を用いてやればよい．それでこれは読者におまかせする．この加法定理は，実変数関数としての $\cos z$，$\sin z$ と複素変数関数としての $\cos z$，$\sin z$ がよく似た性質をもっていることを示している．しかし両者には違いもある．たとえば，これらの関数は，複素変数関数とした場合には有界でない．

ところで，等式(*9*)を用いて，複素変数 $z = x + iy$ の関数 e^z をもっと詳しく調べることができる．まず，

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{16}$$

が成り立つ（7節，(*20*)参照)．

この第1因数 $\rho = e^x$ は指数関数で，比較的容易にこの関数を描写することができる．

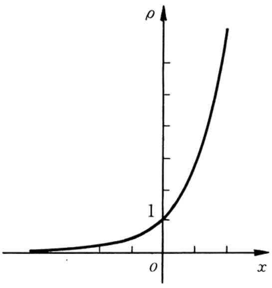


図8

これは単調増大関数で，つねに正で，$x \to \infty$ のとき急速に大きくなり，$x \to -\infty$ のとき急速に零に近づく．この関数のグラフは図8に描いてある．グラフは縦軸と $\rho = 1$ の点で交わる．関数 e^x の逆関数，すなわち，x についての方程式

$$\rho = e^x$$

の解を，e を底とする ρ の対数または ρ の**自然対数**という．ρ の自然対数を $\log \rho$ と書き表す．そうすると，$x = \log \rho$ である．実関数 $\log \rho$ は正の実数 ρ に対してのみ定義される．$\log \rho$ は，$\rho > 1$ のとき正で，$\rho < 1$ のとき負である．この関数のグラフを描くのは容易である．それは，座標平面上の第1象限と第3象限の2等分線に関して $\rho = e^x$ のグラフを対称移動すればよいからである．このグラフは図9に描いてある．

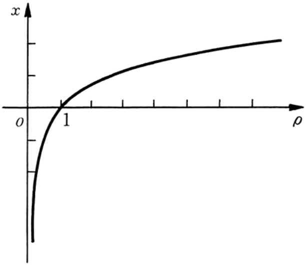


図9

関数 $\cos y$ と $\sin y$ は周期 2π をもっているから，等式(*16*)より，関数 e^z は周期 $2\pi i$ をもつことがわかる．すなわち

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

が成り立つ．

最後に，等式(*16*)から，関数 e^z は z のどの値に対しても零にならないことがわかる．すなわち

$$e^z \neq 0$$

である．

複素変数 w の対数関数 $\log w$　複素変数 w の対数関数 $\log w$ を研究するためには，方程式

$$e^z = w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

を z について解く必要がある．そのためこの方程式を次の形に書き換える．

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

これから

$$\begin{aligned} x &= \log \rho \\ y &= \varphi + 2k\pi \end{aligned} \qquad (17)$$

が得られる．ここで，$\log \rho$ は正の実数 ρ の対数であり，k は任意の整数である．したがって，複素変数 w の複素関数 $\log w$ は多価関数である．その値は

$2k\pi i$ の差を無視すれば1つ定まる．これは先験的に明らかなことでもある．なぜなら複素関数 e^z は周期 $2\pi i$ をもっているからである．正の実数の自然対数の値も同様に多価である．しかし普通は，実数値だけを考察の対象にしており，この場合値は1価になる．このようにここでは，関数概念の拡張は不可避である．すなわち関数の値が多価になる場合があるということである．しかし，初等代数で累乗根を求めるときや三角法で逆三角関数を考察するとき，このような場合にすでにぶつかっているのである．

複素領域における対数関数 $\log w$ の多価性の特長についてイメージをつくるため，点 w は複素変数 w の平面上を座標の原点を通らないようにして1つの曲線を描きながら動いていくものと考えよう．この曲線の方程式は

$$w = w(t)$$

で与えられているとする．ただし，t は実変数（時間）で，零から増大していくとする．ここで

$$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

とおくと，$w(t) = (\rho(t),\ \varphi(t))$ である．ただし，$\rho(t)$ と $\varphi(t)$ は点 $w(t)$ の極座標である．点 $w(t)$ は運動の過程で点 $w = 0$ を通らないから，$\rho(t)$ は正で，しかも t の連続関数である．しかし，$\varphi(t)$ は1価ではない．そこで $\varphi(t)$ を1価関数として扱えるようにするためには，$t = 0$ のとき，$\varphi(t)$ の値の中からどれか1つを選び，それを $\varphi(0)$ とし，つぎに，t が動くとき $\varphi(t)$ が連続になるように，つまり飛躍がないように $\varphi(t)$ の値をつぎつぎに選んでいく必要がある．このようにしたうえで，$t = t_1$ になったとき，点 $w(t)$ が点 $w(0)$ に戻ること，$w(t_1) = w(0)$ になることがある．そしてこのとき

$$\rho(t_1) = \rho(0)\,; \quad \varphi(t_1) = \varphi(0) + 2k\pi$$

となるが，ここで k が0にならないことがある．

したがって，t が0から t_1 まで増大するとき，$\log w$ の値は連続的に変化し，w が曲線に沿って動いた結果，この値は $2k\pi i$ だけ変わる．しかし，w の値は出発点の値と同じである．容易にわかるように，整数 k は点 $w(t)$ が座標の原点のまわりを回る回数に等しい．このことは具体的には次の場合に見ることができる．

$$w(t) = \cos t + i\sin t$$

とおき，$t_1 = 2k\pi$ とする．点 $w(t)$ は原点を中心とする単位円周上を動く．た

だし，$w=1$ を出発点とし，$\varphi(0)=0$ とする．$t_1=2k\pi$ であるから，この運動で点 $w(t)$ は円周上を k 回通る．だから点 $w(t)$ は円周に k 回巻き付く．ゆえに，k は点 $w(t)$ が座標の原点のまわりを回る回数に等しい．さて，$\log w$ の値は点 $w(t)$ が座標の原点のまわりを回る回数に関係して変化するのを考慮して，座標の原点は $\log w$ の**分岐点**，あるいはもっと正確に**対数分岐点**とよばれている．

複素変数の arccos w と arcsin w　　関数 arccos w と arcsin w は容易に複素変数の対数関数を用いて表される．arccos w を求めるためには，方程式 $w=\cos z$ を z について解かなければならない．この方程式を解くために，$\cos z$ を(*14*)を用いて表す．そうすると

$$w=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

が得られる．ここで

$$e^{iz}=\xi \tag{18}$$

とおくと

$$\xi^2-2w\xi+1=0$$

となり，これから $\xi=w+\sqrt{w^2-1}$ が得られる．ここで，関数 $\sqrt{w^2-1}$ は当然2価関数であると考えている．したがって平方根の前に $\pm$ の符号を書く必要はない．さて，(*18*)から

$$z=-i\log(w+\sqrt{w^2-1})$$

が得られる．ゆえに

$$\arccos w=-i\log(w+\sqrt{w^2-1})$$

全く同じようにして

$$\arcsin w=-i\log(iw+\sqrt{1-w^2})$$

が得られる．

これで，arccos w と arcsin w は対数関数を用いて表された．これらの関数を表す式の中に入っている多価関数 $\sqrt{}$ と log は，それぞれに応じていくつかの値をとることができる．

例　対数の歴史　　初等数学でよく知られている対数は次の等比数列と等差数列の性質を比較することによってはじめて生まれてきた．

$$\cdots,\ q^{-n},\ \cdots,\ q^{-1},\ 1,\ q,\ \cdots,\ q^{n},\ \cdots \tag{19}$$

$$\cdots,\ -n\alpha,\ \cdots,\ -\alpha,\ 0,\ \alpha,\ \cdots,\ n\alpha,\ \cdots \tag{20}$$

ただし，$q>1$，$\alpha>0$ である．明らかに，第 1 行に並んでいる数の積に対して第 2 行に並んでいる数の和が対応している．これは現代的にいうと，第 2 行の数は第 1 行の数の適当な数を底とする対数になっていることを意味している．数列(*19*)と(*20*)の間のこの対応関係は，アルキメデスがすでにある程度気づいていたのであるが，15〜16 世紀の数学者にはよく知られていた．しかし，この性質はまだ実用のために使われていなかった．しかし，(*19*)と(*20*)の数の一覧表は掛け算をもっと簡単な足し算に置き換えることが可能なことを示している．16 世紀になると，星を観測して船の位置を決定する天測航法など航海術の必要性から，いろいろな計算法が発展し，とくに対数表が出現してきた．最初の対数表はスイスの数学者ビュルギとスコットランドの数学者ネイピアによって 17 世紀に作成された．ここでは，ビュルギの基本的な考えを述べることにしよう．

対数表を作成するためには，数列(*19*)の項は十分稠密に並んでいること，すなわち，q は十分 1 に近いことが重要である．$q=1+\dfrac{1}{k}$ とおいてよい．ただし，k は十分大きい自然数である．$\alpha=\dfrac{1}{k}$ とおくと，数列(*19*)と(*20*)の代わりに，次の数列が得られる．

$$\cdots,\ \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-n},\ \cdots,\ \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1},\ 1,\ \left(1+\frac{1}{k}\right),\ \cdots,\ \left(1+\frac{1}{k}\right)^{n},\ \cdots \tag{21}$$

$$\cdots,\ -\frac{n}{k},\ \cdots,\ -\frac{1}{k},\ \frac{0}{k},\ \frac{1}{k},\ \cdots,\ \frac{n}{k},\ \cdots \tag{22}$$

ここで，数列(*22*)の各項は数列(*21*)の各項の $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k}$ を底とする対数になっている．k が大きければ大きいほど，数列(*21*)はより稠密になり，(*21*)と(*22*)を用いて作成される対数表はより完全なものになる．ビュルギは k として 10000 をとり，対数の底 $\left(1+\dfrac{1}{10000}\right)^{10000}$ の値として 2.71824 という数値を得た．この値は e と小数第 4 位まで一致する．e 自体は，7 節の例 1 で指摘

しておいたように，$k \to \infty$ のときの $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$ の極限値として定義してよい数である．この極限移行の結果，(21)と(22)の間の対応関係は対数関係 $y = \log x$ に変わるのである．

9．べ　き　級　数

複素変数 z の指数関数 $\exp(z)$ は次のようにべき級数の和として定義された（7節参照）．

$$\exp z = \frac{1}{0!} + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{1}$$

このことの自然な一般化になるのは，次のようにべき級数を用いて複素変数 z の複素関数 $f(z)$ を表現することである．

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{2}$$

ここで，a_0，a_1，a_2，…，a_n，…は与えられた複素数で，これらは級数(2)を定め，さらに関数 $f(z)$ をも定めるものである．明らかに，級数(1)は(2)の特別の場合で，

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

とおけば得られる．また，関数 $f(z)$ が級数(2)で定義されるのは，級数(2)が収束する変数 z の値に対してだけである．級数(1)によって指数関数 $\exp(z)$ が定義されたが，この級数は z のすべての値に対して収束する（7節参照）．しかしもちろん，級数(2)はいつもこのような性質をもっているとは限らない．したがって，ここで出会う第1の重要課題は，級数(2)が与えられたとき，この級数は z のどのような値に対して収束するか，あるいはまた，このほうがもっと重要であるが，z のどのような値に対して絶対収束するか，という問題を解くことである．

明らかに，$z=0$ のとき，級数(2)はいつも収束する．しかし，$z=0$ だけで収束する型の級数(2)もまた存在する（例1参照）．このような級数を用いて，もちろん，どのような関数も定義されない．それでここではしばらくの間このような級数を自明な級数と呼ぶことにする．

自明でない級数の性質　さて，級数(2)は $z=z_0\neq 0$ で収束すると仮定しよう．このとき，5節の(6)から

$$\lim_{n\to\infty} a_n z_0{}^n = 0$$

となる．したがって

$$a_n z_0{}^n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

の絶対値はどれもある定数 a より小さい．ゆえに，$|a_n||z_0|^n < a$.

このことから係数 a_n の評価が得られる．すなわち

$$|a_n| < \frac{a}{|z_0|^n},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

が成り立つ．ここで，正の項をもつ補助の級数をつくる．

$$\hat{f}(z) = a + a\frac{|z|}{|z_0|} + a\frac{|z|^2}{|z_0|^2} + \cdots + a\frac{|z|^n}{|z_0|^n} + \cdots \tag{3}$$

級数(3)は，いわゆる級数(2)の**優級数**で，(3)の各項は(2)の対応する項より大きい．すなわち

$$|a_n z^n| < a\frac{|z|^n}{|z_0|^n} \tag{4}$$

である．z が

$$|z| < |z_0| \tag{5}$$

のとき，(3)は収束する等比級数であるから，条件(5)の下で，級数(2)は絶対収束する．

級数(2)で定数項を取り除こう．そうすると，級数

$$f_1(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

が得られる．次の級数はこれの優級数である．

$$\hat{f}_1(z) = a\frac{|z|}{|z_0|} + a\frac{|z|^2}{|z_0|^2} + \cdots + a\frac{|z|^n}{|z_0|^n} + \cdots \tag{6}$$

したがって

$$|f_1(z)| \leqq \hat{f}_1(z)$$

となる．条件(5)の下で，(6)の等比級数は収束し，その和は

$$\hat{f}_1(z) = \frac{a\dfrac{|z|}{|z_0|}}{1-\dfrac{|z|}{|z_0|}} = \frac{a|z|}{|z_0|-|z|}$$

である（6節，(21)参照）．ゆえに

$$|f_1(z)| \leqq \frac{a|z|}{|z_0|-|z|} \tag{7}$$

さて，

$$f(z) = a_0 + f_1(z) \tag{8}$$

で，$f_1(z)$ について不等式(7)が成り立つ．つぎに

$$a_0 \neq 0$$

と仮定する．ここで，$|z|$ の限界を適当に選んで，(8)の第1項の絶対値が第2項の絶対値より大きくなるようにする．そのためには

$$|z| < \frac{|a_0|}{2a}|z_0| = \rho \tag{9}$$

とすればよい．実際，(7)で $|z|$ の代わりに(9)の右辺を代入すると，(7)の右辺がより大きくなり，次の不等式が得られる．

$$|f_1(z)| < \frac{a\dfrac{|a_0|}{2a}|z_0|}{|z_0|-\dfrac{|a_0|}{2a}|z_0|} = \frac{a|a_0|}{2a-|a_0|} < \frac{a|a_0|}{a} = |a_0|$$

ゆえに，$a_0 \neq 0$ の場合，正の数 ρ ((9)参照）を適当にとると

$$|z| < \rho$$

のとき級数(2)は収束し，しかもその和 $f(z)$ は0にならない．すなわち

$$|z| < \rho \quad \text{のとき，} f(z) \neq 0 \tag{10}$$

が成り立つ．

収束半径　次のことが成り立つ．級数(2)が自明でない級数ならば，正の数 r（$r = \infty$ の場合も含む）が存在して，$|z| < r$ のとき，(2)は絶対収束し，$|z| > r$ のとき，(2)は発散する．この r を級数(2)の**収束半径**といい，原点 o を中心とする半径 r の円を級数(2)の**収束円**という．

自明でない級数(2)に対して収束半径が存在することを証明しよう．M を次の条件(11)を満たす z_0 の絶対値 $|z_0|$ 全体からなる実数の集合とする．

$$z = z_0 \quad \text{のとき　級数(2)は収束する．} \tag{11}$$

まず条件(11)から，α が M に含まれているならば，$\beta < \alpha$ なる正の数 β はすべて M に含まれる．だから，M が任意に大きい数を含むならば，M は正の数全体の集合になる．この場合，$r = \infty$ とおく．M が任意に大きい数を含まないならば，M は有界である．この場合，r を M の上限（4節参照）とする．

このいずれの場合にも，M は $0 < \alpha < r$ を満たす α を全部含む．この r が級数(2)の収束半径であることを証明する．

$|z_1| < r$ とする．このとき，次のような z_0 が存在する．すなわち，$z = z_0$ に対し級数(2)は収束し，しかも

$$|z_1| < |z_0| < r$$

を満たすものである．$z = z_0$ に対し(2)が収束するから，条件(5)によって，(2)は $z = z_1$ に対し絶対収束する．ゆえに，$|z| < r$ を満たすすべての z に対し，(2)は絶対収束する．一方，$|z_1| > r$ とすると，$|z_1|$ は M に含まれないから，$z = z_1$ に対し，(2)は発散する．これで自明でない級数(2)に対して収束半径 $r > 0$ が存在することが証明された．ところで，級数(2)が $z = 0$ に対してだけ収束するとき，(2)の収束半径は0であると見なすことにしよう．そうすると以後，「自明でない級数」という用語は不必要になろう．

点 $z = 0$ の近くにおけるべき級数の行動　級数(2)の収束半径は正で，係数の中には0にならないものがあると仮定する．このとき，次のことを証明しよう．すなわち，ある小さい正の数 ρ が存在して，方程式

$$f(z) = 0 \tag{12}$$

は，$|z| < \rho$ の中に解を全然もたないか，あるいは，ただ1つの解 $z = 0$ をもつ．

級数(2)の最初の0にならない係数を a_k とする．そうすると，$k = 0$ の場合は考察ずみである（(10)参照）．この場合，方程式(12)は解をもたない．そこで，$k > 0$ とする．関数 $f(z)$ を次の形に書く．

$$f(z) = z^k f_k(z)$$

ただし，

$$f_k(z) = a_k + a_{k+1}z + \cdots + a_{k+n}z^n + \cdots \tag{13}$$

である．級数(13)の定数項 a_k は0でないから，(10)によって正の数 ρ_k が存在して，$|z| < \rho_k$ に対し $f_k(z) \neq 0$ となる．したがって，$f(z) = z^k f_k(z)$ が0になるのは，第1因数が0になるとき，すなわち $z = 0$ のときしかもこのときだけである．

級数の一意性の定理　複素変数 z の平面上の無限集合で，点0を集積点（1節，例3参照）にもつ集合を M とする．関数 $f(z)$ は次の級数によって定義され，集合 M の各点で0になると仮定する．

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{14}$$

$$z \in M \quad \text{のとき} \quad f(z) = 0 \tag{15}$$

このとき，級数(14)の係数はすべて0になる．

このことを証明しよう．級数(14)の係数の中に0にならないものがあったと仮定する．すぐ上で証明したことによって，正の数 ρ が存在して，方程式 $f(z)=0$ は，$|z|<\rho$ の中にたかだか1つしか解をもたない．さらに解をもてば，その解は $z=0$ である．不等式 $|z|<\rho$ によって点0の半径 ρ の近傍 U_ρ が定められる．点0は M の集積点であるから，この近傍の中に点0と異なる M の点 z が存在する．(15)によって，この点 z に対して $f(z)=0$ となる．これは矛盾である．

ゆえに，級数(14)の係数はすべて0でなければならない．

今度は，上の命題を用いて，2つの級数にかかわる次の命題を証明しよう．級数を

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots \tag{16}$$

$$\psi(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_n z^n + \cdots \tag{17}$$

とする．点0を集積点にもつ集合を M とする．このとき，M に含まれるすべての点 z に対して

$$\varphi(z) = \psi(z) \tag{18}$$

が成り立つならば，級数(16)と(17)の係数はすべて一致する．すなわち

$$\alpha_n = \beta_n, \quad n = 0,\ 1,\ \cdots \tag{19}$$

2つの級数にかかわるこの命題の証明は，1つの級数に関する最初の命題に直ちに還元させられる．そのためには，(16)と(17)の差をとればよい．

$$f(z) = \varphi(z) - \psi(z) = (\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)z + \cdots + (\alpha_n - z_n)z^n + \cdots \tag{20}$$

(18)から，$z \in M$ に対して $f(z)=0$ となる．したがって級数(20)の係数はすべて0に等しい．このことは(19)が成り立つことを意味している．

これで一意性の定理が証明された．

関数のべき級数による表現は高等数学における最も重要な方法の1つである．この方法は一連の問題を提起している．それらの中に次の問題がある．実変数 x の関数 $f(x)$ は，x の小さな区間 $|x|<\rho$ において，2つの異なるべき級数

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots \tag{21}$$

$$\psi(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_n x^n + \cdots \tag{22}$$

によって表現されるか．ただし，ρ は正の数である．一意性の定理からただちにこの問題に対して否定の答えが得られる．すなわち，この 2 つの関数が同じ 1 つの関数 $f(x)$ に等しいならば，級数(*21*)と(*22*)の係数はすべて等しくならなければならない．

実際，級数(*21*)と(*22*)において実変数 x の代わりに複素変数 w を代入すると，2 つの関数 $\varphi(z)$ と $\psi(z)$ が得られ，この $\varphi(z)$ と $\psi(z)$ は，$|x| < \rho$ を満たす実数全体からなる集合 M の上で等しくなる．点 0 はこの M の集積点である．ゆえに，一意性の定理によって級数(*21*)と(*22*)の係数はすべて等しくならなければならない．また，いまの議論から同時にほかの問題の解答も得られた．実変数 x の関数 $f(x)$ が小さな区間 $|x| < \rho$ においてべき級数によって表されるならば，べき級数によって表される複素変数の関数への $f(x)$ の拡大は一意的である．このことは，とくに実変数の関数 e^x，$\cos x$，$\sin x$ に対していえる．前節でこれらの関数を複素変数 z の関数に拡大したのであるが，いま明らかになったように，この拡大は一意的である．

さて今度は，べき級数の収束半径を求めてみよう．

例 1　最初に，収束半径が 0 であるべき級数の例をあげよう．

$$1 + 1!z + 2!z^2 + \cdots + n!z^n + \cdots \tag{23}$$

この級数は $z \neq 0$ に対して発散する．証明するために，$|z| = \dfrac{1}{\alpha}$ とおく．そうすると

$$|n!z^n| = \frac{n!}{\alpha^n}$$

となる．2 節の(*18*)により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\alpha^n} = \infty$$

である．したがって，級数(*23*)の項は 0 に収束しない．ゆえに，級数(*23*)は $z \neq 0$ に対して発散する．

例 2　次の級数を考えよう．

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \tag{24}$$

これは等比級数である．$|z| < 1$ のとき級数は収束し，その和は 6 節の(*21*)に

よって

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \tag{25}$$

で与えられる．$|z| \geqq 1$ のとき級数(24)は発散する．なぜなら級数の項が 0 に収束しないからである．したがって，級数(24)の収束半径は 1 である．なお，とくに注意しておかなければならないのは，$|z| = 1$ のとき級数(24)はつねに発散するということである．また，ここでたいへん重要で興味深い事実を指摘しておかなければならない．$f(z)$ は級数(24)によって $|z| < 1$ なる z に対してだけ定められた関数であるが，ところが一方，$f(z)$ は $z \neq 1$ なるすべての z に対して定まる(25)の式で表されている．この現象は解析関数の理論において非常に重要でしかも典型的である．最初，解析関数をべき級数によってその収束円内の点だけに対して定義する．その後で，このようにして定められた関数を，収束円以外の点に対して——いまの例でいえば $z = 1$ 以外のすべての点に対して——実際に拡大する．最初収束円内の点で定められた関数をもっと広い領域の点に対して拡大して得られるこのような関数は，もとの関数の**解析接続**とよばれている．しかもこの解析接続は一意的であることが示されている．次の事実も解析関数にとって典型的である．(25)の関数 $f(z)$ を表すべき級数の収束円の境界上にこの関数 $f(z)$ の特異点，$z = 1$ が存在する．この $z = 1$ で $f(z)$ は無限大になる．いいかえれば $f(z)$ は定義されない．また，(25)の関数 $f(z)$ をもとにしてこの関数をべき級数に展開しようとすれば，その級数の収束円は点 $z = 1$ を含むことができない．なぜならこの $f(z)$ はこの点で無限大になるからである．したがって，(25)の関数を表すべき級数は，$r > 1$ なる収束半径 r をもつことができなくて，収束半径は 1 に等しくなる．このようにして，(25)の関数の特異点が収束円の境界上に現れることは収束円の拡大を妨げることになっている．

例 3　次の級数は級数(24)の自然な一般化である．

$$f_k(z) = 1 + 1^k z + 2^k z^2 + \cdots + n^k z^n + \cdots \tag{26}$$

ただし，k は整数である．$k = 0$ のとき，(26)は級数(24)になる．2 節の(15)と(16)から，任意の k に対して(26)の収束半径が 1 になることが得られる．

$k = -1$ とすると，注目すべき級数が得られる．後で証明されるように

(13 節，例 3 参照)，この級数の和は $1-\log(1-z)$ である．したがって

$$1-\log(1-z)=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots$$

が成り立つ．ここで，z を $-z$ に置き換えると

$$\log(1+z)=\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots \qquad (27)$$

が得られる．$z=1$ に対して級数(27)は収束する．なぜなら，この場合(27)は交代級数となるからである（5 節参照)．$z=-1$ に対して(27)は発散する（5 節参照)．したがって，級数(27)は収束円の境界上のある点において収束し，ある点において発散する．また，$k=-2$ とすると，次の級数が得られる．

$$f_{-2}(z)=1+\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{n^2}+\cdots$$

この級数は収束円の境界上のすべての点で，すなわち $|z|=1$ に対して収束する（6 節，例 2 参照)．

これらの例から明白なように，収束円の境界上における級数の行動はさまざまである．級数 $f_0(z)$ は収束円の境界上のすべての点で発散する．級数 $f_{-1}(z)$ は収束円の境界上のある点で収束し，ある点で発散する．最後に，級数 $f_{-2}(z)$ は収束円の境界上のすべての点で収束する．

例 4　z_0 を 1 つの複素数とし，関数 $f(z)$ を次の $z-z_0$ のべき級数によって与えることができる．

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots \qquad (28)$$

さきに証明したことからわかるように，この級数に対して，$r\geqq 0$ なる数 r が存在して，$|z-z_0|<r$ のとき(28)は収束し，$|z-z_0|>r$ のとき(28)は発散する．

2章
微　分　法

この章では，数学解析の基礎事項の最初の部分，すなわち，関数の微分係数の概念，いろいろな関数の微分係数の計算法，いいかえれば関数の微分法に関する事項について簡潔に説明することにしよう．微分係数を定義するためには，まずはじめに1章で述べられた極限概念を若干手直しすることが必要である．その後で実数の場合と複素数の場合を別々に分けずに同時に微分係数の定義そのものについて述べる．このことは10節で行われる．11節では，微分係数の計算規則について述べる．そこでは第1にべき級数の微分係数の計算法について述べられる．この規則を用いると，1章で扱われたべき級数で表現される関数，e^z，$\cos z$，$\sin z$ の微分係数を計算することができる．その後で，積，商，合成関数の微分法の規則が述べられる．合成関数に対する規則から逆関数の微分法の規則が導かれる．したがって，11節においてすべての初等超越関数に関する微分法の規則が述べられることになる．この章は“微分法”と名づけられているが，ここでは微分法の逆算として積分法が導入される．関数の原始関数の概念が，いいかえると不定積分の概念が実数の場合と複素数の場合を分けずに導入されるのである．ラグランジュの公式を用いて，原始関数は定数差を無視すれば一意的であることが証明される．したがって，前もって実関数のロールの定理とラグランジュの公式を証明しておかなければならない．これらのことはすべて12節で行われる．13節で，いくつかの具体的な関数の原始関数が求められる．また，積分法のいくつかの規則，すなわち，部分積分法，置換積分法について述べられる．14節で，いくらか不自然ではあるが，定積分の概念を，与えられた点 z_0 において0になる原始関数として導入する．これに基づいて，定積分に関する一連の規則，とくに，実関数の定積分に対する関数

の絶対値による評価が与えられる．その際，ラグランジュの公式が用いられる．

定積分はこのようにいくらか不自然な方法で導入されるが，それは，この章の最後の節で，積分の形の剰余項をもつテイラーの公式を与え，一連の具体的な場合にこの剰余項の評価を与えるためである．積分の形の剰余項の計算は非常に簡単にできる．積分の形の剰余項のこのような簡単な計算は著者はほかで見たことがない．

10. 微 分 係 数

数学解析において非常に大きな役割を果たしているのはいわゆる関数の微分係数である．実変数 t の関数 $f(t)$ について研究するとしよう．ある演算を用いて，この演算については後で詳しく述べるが，関数 $f(t)$ から新しい関数 $f'(t)$ をつくる．この新しい関数は関数 $f(t)$ の微分係数とよばれているものである．どのようにして $f'(t)$ を $f(t)$ からつくるか，ということについて詳細に述べる前に，この $f'(t)$ について少し言葉で説明してみよう．もちろん，微分係数の言葉による説明はかなりあいまいである．しかし微分係数の数学の応用上の意義，とくに物理学や他の自然科学への応用上の意義を理解することができるであろう．説明の便宜上，t は時間で，$f(t)$ は時間とともに変わる何か物理量であるとしよう．時間の流れとともに変わる物理量にはあらゆる物理過程において出会う．たとえば，横軸上を動いている点の座標 x は時間に依存し，それは時間の関数である．したがって，この運動過程は次の形の式で書き表すことができる．

$$x = f(t)$$

この方程式によって点の位置は時間の変化とともにどのように変わるかが記述されている．全く同じように，物体の温度 T が時間とともに変わるとき，この変化の過程は次の形の方程式で記述される．

$$T = f(t)$$

ここに，$f(t)$ は時間 t の関数として定まるものである．このような方程式を正確に記述することは別にやらなくても，明らかに，時間 t とともに変わる変量 $f(t)$ の変化の速さは各瞬間ごとに異なることがあると考えられる．ゆえに，変量 $f(t)$ の変化の速さは瞬間 t に依存し，したがって時間 t の関数であると

考えられる．この速さを $f'(t)$ で表そう．こうして，微分係数 $f'(t)$ の言葉による定義を正確に述べると次のとおりである．すなわち，$f'(t)$ は変量 $f(t)$ の瞬間 t における速さである．さて，物理過程を研究するとき，物理現象の与えられた瞬間における状態を特長づけるいくつかの物理量が選び出される．しかもこれらの量は法則的に時間とともに変化していく．つまり物理過程が進行していく．たとえば，シリンダー内のガスの圧縮についての問題の場合は，与えられた瞬間におけるガスの状態の特性量は次のとおりである．すなわち，ガスの体積，圧力および温度である．ガスの圧縮が起こると，これらの量は全部時間とともに変化する．したがって，明らかにそれらの変化の速さがガスの圧縮過程の記述の際に本質的な役割を果たしている（13節，例1参照）．ところで，すべての，あるいはほとんどすべての物理法則は，物理量とその変化の速さに関する方程式，つまり関数とその微分係数に関する方程式を用いて数学的に記述できることがわかっている．このことが物理過程の研究に対する微分係数の非常に大きな意義を決定しているのである．

さて，微分係数の概念について数学的に正確に記述するためには，1節で述べられた極限移行の演算をあらかじめ若干手直ししておく必要がある．

極限移行の新しい概念　1節では数列

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \tag{1}$$

から出発した．そこでは，数列(*1*)が s に収束するという命題はどんな意味をもっているかが明らかにされた．すなわち次のことが示された．数列(*1*)が s に収束するのは，n が限りなく大きくなるならば差 $s_n - s$ は限りなく 0 に近くなるときしかもこのときだけである．さらに，(*1*)が s に収束することは

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \tag{2}$$

と書き表された．ここで，この極限移行の数学的に正確な定式化を思い出してみよう．それは数学界で受け入れられており，1節ですでに述べておいたものである．極限の式(*2*)が成り立つというのは，任意の正の数 ε に対して適当な大きい整数 ν を選んで，$n > \nu$ ならば $|s_n - s| < \varepsilon$ が成り立つようにできることである．

この極限移行の記述は，出発点の対象として数列ではなく次の式で定義され

る整数の関数 $f(n)$ をとり，$f(n)$ に関する記述に書き直すことが容易にできる．

$$f(n) = s_n, \quad n = 1,\ 2,\ \cdots \tag{3}$$

明らかに，数列(1)が既知であれば整数変数 n の関数 $f(n)$ もわかり，逆に，整数変数 n の関数 $f(n)$ が既知であれば数列(1)もわかる．数列と関数の関係は(3)の式で与えられる．さて今度は，整数変数 n の関数 $f(n)$ から実変数または複素変数 z の関数 $f(z)$ へ移るのは自然なことである．整数変数 n の関数を考察するとき，この変数 n は限りなく大きくなる，つまり無限大になるときのことを考えた．実変数または複素変数 z の関数 $f(z)$ を考察するときは，変数 z が1つの数値 z_0 に限りなく近づくときのことを考えることになる．そこで z が z_0 に限りなく近づくとき，$f(z)$ が f_0 に収束することを

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0 \tag{4}$$

と書き表すことにする．なおこのとき，関数 $f(z)$ は $z = z_0$ で定義されていなくてもよい．

極限の式(4)は次のように自明な意味をもっている．関数 $f(z)$ の変数 z が z_0 に限りなく近づくとき，関数値 $f(z)$ は f_0 に限りなく近づく．ところで，現在数学界で受け入れられているこの式の正確な定式化は次のとおりである．極限の式(4)が成り立つというのは，任意の正の数 ε に対して，適当な小さい正の数 δ を選んで，$0 < |z - z_0| < \delta$ ならば，$|f(z) - f_0| < \varepsilon$ が成り立つようにできることである．

関数に対する極限移行の新しいこの定義は数列に対する極限移行の定義とよく似ているだけでなく，両者は論理的にも結び付いている．しかしこの関係についてはこれ以上立ち入らない．

連続関数　関数 $f(z)$ に対する極限移行の新しい定義を用いることによって，関数の連続性の新しい定義が得られる．すなわち，関数 $f(z)$ が $z = z_0$ で**連続**であるというのは，等式

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{5}$$

が成り立つことである．この新しい連続性の定義は1節の例1で与えられた定義と同等である．しかし以下では，連続性のこの新しい定義だけを使うことにするが，以前の定義との関係を確かめるために，新しい意味での連続関数は((5)参照)，もとの意味でも連続であることは証明しておこう．この証明はこ

の節の例3で行う．

関数の微分係数　数学では，実変数の関数と同じように複素変数の関数についても微分係数が考察される．しかもその定義は両方とも全く同じである．したがって，実変数か複素変数か前もってどちらかに決めないで，最初から，実変数または複素変数の関数 $f(z)$ を考えることにする．さて，関数 $f(z)$ の変数の値 z を一時的に固定し，変数のこの値 z における $f(z)$ の微分係数の値 $f'(z)$ を定義しよう．このため，固定された z と並んで $f(z)$ の変数の任意の値 ζ をとる．この ζ は変数の値を z から変化させて得られた値と考えよう．このことを強調するために，

$$\Delta z = \zeta - z$$

を z の**増分**とよぶ．そうすると

$$\zeta = z + \Delta z$$

である．また，独立変数の増分 Δz に対応して，関数の増分 $\Delta f(z)$ を次の式で定義する．

$$\Delta f(z) = f(\zeta) - f(z) = f(z + \Delta z) - f(z)$$

微分係数 $f'(z)$ を定義するため，つぎに関数の増分の変数の増分に対する比をつくる．

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{6}$$

この比は z と等しくないすべての ζ に対して，つまりすべての $\Delta z \neq 0$ に対して定義される．$\zeta = z$ のとき，分数(6)の分子も分母も0になり，分数は意味をもたなくなってしまう．最後に，$\zeta \to z$ のとき，あるいは同じことだが，$\Delta z \to 0$ のとき，比(6)がある極限に収束するならば，すなわち

$$\lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \tag{7}$$

が存在するならば，関数 $f(z)$ は変数の値 z において**微分係数** $f'(z)$ をもつといい，$f'(z)$ を次の式で定義する．

$$f'(z) = \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \tag{8}$$

なお，z における微分係数の定義の際，z の十分近くにある ζ はすべて変数の許容値になっていることを前提にしておく．また以下で微分係数が書かれてい

る場合，それは存在しているものと見なすことにする．

関数 $f(z)$ が複雑な式の形で書き表されている場合，微分係数の符号 “′” はかっこの外に書くこと，つまり次のように書くこともある．

$$f'(z) = (f(z))' \tag{9}$$

また以下で $f'(z)$ と書くときは，つねに，$f(z)$ の微分係数は与えられた z において存在する，つまり極限(7)が存在すると見なすことにする．

関数 $f(z)$ の z における微分係数 $f'(z)$ を定義するときには，原則として，関数 $f(z)$ は z のある近傍 U_δ（1節，(12)，(16)参照）に含まれる変数のすべての値に対して定義されていることが前提になっている．したがって，極限(7)を計算するとき，ζ として不等式 $0 < |\zeta - z| < \delta$ を満たす任意の ζ をとることができる．

無限小　　この節で与えられた極限の新しい定義と関連して，無限小についても新しい解釈が生じてくる．変数 τ が 0 に近づくとき，0 に近づく変数という意味で，この τ を**無限小**とよぶことにする．微分係数の計算の際の独立変数の増分 $\Delta z = \zeta - z$ はこの意味で無限小である．つぎに，τ がこの意味で無限小で，$\varphi(\tau)$ が τ の関数でしかも

$$\lim_{\tau \to 0} \varphi(\tau) = 0$$

であるとき，$\varphi(\tau)$ もまた無限小とよぶ．このことをもっと完全にいい表そうとすれば，$\varphi(\tau)$ は τ とともに無限小である，ということができよう．また，しばしば $\varphi(\tau)$ の減少の速さと τ の減少の速さを比較することが必要になる．このことはまず第1に記号 O と o（2節参照）を用いることによってなされる．$\tau \to 0$ のとき

$$\frac{\varphi(\tau)}{\tau} \tag{10}$$

が有界ならば，

$$\varphi(\tau) = O(\tau)$$

と書く．

また，$\tau \to 0$ のとき，分数(10)が 0 に収束するならば

$$\varphi(\tau) = o(\tau)$$

と書く．さらにまた，しばしば $\varphi(\tau)$ の減少の速さと τ^n に減少の速さを比較することが必要になる．ただし，n は自然数である．

最後に

$$\varphi(\tau) = O(\tau^n)$$

のとき，$\varphi(\tau)$ は **τ に関して n 次の無限小**であるという．

微分　微分係数の定義をもっと詳しく検討してみよう．微分係数は次の式で与えられる．

$$f'(z) = \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

((*8*)参照) いいかえると

$$\alpha(\zeta,\ z) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z) \tag{11}$$

は $\zeta - z$ とともに無限小である．等式(*11*)は次の形に書き換えることができる．

$$f(\zeta) - f(z) = f'(z)(\zeta - z) + \alpha \cdot (\zeta - z)$$

しかも

$$\lim_{\zeta \to z} \alpha = 0$$

である．

$$\alpha \cdot (\zeta - z) = \beta$$

とおくと，(*11*)は次の形に書き換えられる．

$$f(\zeta) - f(z) = f'(z)(\zeta - z) + \beta \tag{12}$$

しかも，明らかに

$$\beta = o(\zeta - z) \tag{13}$$

である．

等式(*12*)の左辺は関数の増分で，右辺は2つの項からなり，第2項は条件(*13*)を満たしている．したがって，$f'(z) \neq 0$ ならば，(*12*)の右辺の第2項は第1項よりも速く0に収束する．ゆえに，(*12*)の右辺の第1項は右辺の和の主要部である．ゆえに，関数 $f(z)$ の増分 $\Delta f(z)$ の主要部は $f'(z)\Delta z$ に等しいということができる．ここで新しい用語を導入しよう．まず，独立変数の増分 Δz を z の微分といい，

$$\Delta z = dz$$

と書く．つぎに，関数 $f(z)$ の増分 $\Delta f(z)$ の主要部を $f(z)$ の**微分**といい，$df(z)$ で表す．したがって

$$df(z) = f'(z)dz \tag{14}$$

が得られる．さて，微分の概念から導かれるものはいまのところ少ない．まず第1に，微分を用いると微分係数の新しい表し方が得られる．すなわち(*14*)から

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \tag{15}$$

となる．しかし，そのうちに微分はいろいろ有益に使えることがわかる．ところで，微分係数はときには次の形の式で書き表される．

$$f'(z) = \frac{d}{dz} f(z) \tag{16}$$

微分係数の(*15*)や(*16*)のような書き表し方は記号 $f'(z)$ よりも有利な点がある．なぜなら，この書き方によれば，微分係数はどの変数に関する微分係数であるかが，ひと目でわかるし，またこのことがいろいろの場合にたいへん重要なことがわかっているからである．さて，式(*15*)に関連して，微分係数を求める演算はしばしば**微分演算**とよばれている．また，関数が z で微分係数をもつとき，関数は z で微分可能であるといい，変数のすべての値において微分係数をもつ関数を**微分可能関数**という．

微分可能関数の連続性　　関数 $f(z)$ が z で微分係数 $f'(z)$をもつならば，$f(z)$ は z で連続である．実際，(*12*)で $\zeta \to z$ のときの極限をとると

$$\lim_{\zeta \to z}(f(\zeta) - f(z)) = \lim_{\zeta - z}(f'(z)(\zeta - z) + o(\zeta - z)) = 0$$

が得られる．したがって，$f(z)$ は z で連続である．ゆえに，関数が変数のすべての値において微分係数をもつならば，その関数は連続である．

偏微分係数　　これまで1変数の関数についてだけ述べてきた．しかし実際はほとんどいつも多変数の関数にかかわっていたのである．たとえば，変数 z の多項式は，実際はその係数の関数になっている．それにもかかわらず，多項式の微分係数を求める場合，明らかに，微分係数は z について求めるものと理解している．しかしいろいろの場合において，多変数の関数，たとえば2変数の関数 $f(z,\ w)$ を扱うとき，2つの変数のうちどちらについて微分係数を求めるのか，はっきり表明しておくことが大切である．このようなどれかの変数についての微分係数を**偏微分係数**といい，z についての偏微分係数は

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z,\ w) \tag{17}$$

で表される．z についての偏微分係数の計算は z だけの増分をとり，w は定数と見なして行うのである．

例 1　ここで実変数 x の実数値関数 $f(x)$ の微分係数を幾何学的に解釈してみよう．このために直交座標系の定められた平面 P 上に関数 $f(x)$ のグラフ K を描く（図 10）．したがって K は方程式

$$y = f(x) \tag{18}$$

によって与えられる曲線である．$f(x)$ の変数の値 x を 1 つ固定し，(18)によって x に対応する関数の値を y とする．そうすると，$a=(x,\ y)$ は曲線 K 上の点である．この点を定点と見なすことにする．x と並んで $\xi \neq x$ なる ξ を任意にとり，ξ に対応する関数の値を η とする．したがって $\eta = f(\xi)$ である．点 $\alpha = (\xi,\ \eta)$ は曲線 K 上の点で，この点は動点と見なす．ξ が減少しながら x に近づくと，点 α は曲線 K に沿って動き，右から点 a に近づく．ξ が増加しながら x に近づくと，点 α は曲線 K に沿って動き，左から点 a に近づく．つぎに，点 a と α を通る直線を引く．L は曲線 K の割線となる．直線 L の傾斜角のタンジェント，つまり横軸と直線 L のなす角のタンジェントを求めよう．このために，点 a を通る水平線，つまり横軸に平行な直線を引き，さらに点 α を通る垂線を引く．この 2 つの直線の交点を γ とする．直角三角形 $a\gamma\alpha$ の頂点 a の角のタンジェントを求める．ただしこの際角の符号を考慮する．便宜上 $\xi > x$ とする．このとき正の数 $\xi - x$ は直角三角形 $a\gamma\alpha$ の辺 $a\gamma$ の長さに等しい．また，数 $\eta - y$ は辺 $\gamma\alpha$ の長さに等しい．ただしこの長

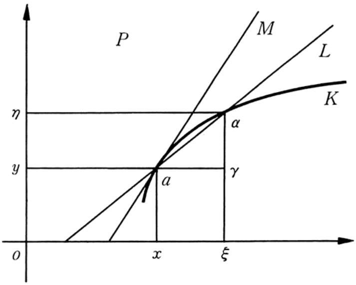


図 10

さは，$\eta > y$ のとき＋の符号をとり，$\eta < y$ のときは－の符号をとるものとする．したがって，いずれの場合でも，直線 L の傾斜角のタンジェントは比 $\dfrac{\eta - y}{\xi - x}$ に等しい．$\xi < x$ の場合も，直線 L の傾斜角のタンジェントはこの比に等しい．このことは，$\eta - y$ と $\xi - x$ の両方の符号を考慮すると容易に確かめられる．さて，関数 $f(x)$ の x における微分係数 $f'(x)$ が存在するならば，これは $\xi \to x$ のとき，$\dfrac{\eta - y}{\xi - x}$ が $f'(x)$ に収束することを意味している．ゆえに，微分係数 $f'(x)$ が存在すれば，点 α が点 a に近づくとき，割線 L の傾斜角のタンジェントはある極限に収束する．この場合，直線 L 自身はある直線 M に収束し，しかも M は点 a を通る．この直線 M を曲線 K の点 a における**接線**という．ゆえに，微分係数 $f'(x)$ は，関数 $f(x)$ のグラフ K の点 $a = (x,\ y)$ における接線 M の傾斜角のタンジェントである．これが微分係数の幾何学意味である．

ところで，ξ を x より大きくしたまま $\xi \to x$ とするとき，比 $\dfrac{\eta - y}{\xi - x}$ が極限 k_1 に収束し，ξ を x より小さくしたまま $\xi \to x$ とするとき，同じこの比が別の極限 k_2 に収束することがある．この場合，関数 $f(x)$ は x で微分係数をもたない．k_1 は右方微分係数，k_2 は左方微分係数とよばれている．$k_1 \neq k_2$ であるから，α が右から a に近づくときの割線 L の極限の直線を M_1 とし，α が左から a に近づくときの割線 L の極限の直線を M_2 とする．直線 M_1 と M_2 は一致しないし，曲線 K は点 a で接線をもたない．この場合，点 a は曲線 K の**角点**とよばれている．角点の最も簡単な例は次の関数によって与えられる．

$$f(x) = |x|$$

この関数のグラフは方程式 $y = |x|$ によって与えられ，座標平面の第 1 象限の 2 等分線と第 2 象限の 2 等分線からなるものである．$x = 0$ のとき，$k_1 = +1$，$k_2 = -1$ であり，この場合“角点”という用語の意味は明瞭である．

例 2　もう 1 つ微分係数の重要な応用例をあげよう．まず次のことを証明する．実変数 x の実数値関数 $f(x)$ が与えられた x で正の微分係数をもつならば，つまり $f'(x) > 0$ ならば，x で $f(x)$ は増加である．正確にいうと，ある小さい正の数 δ が存在して，$|\xi - x| < \delta$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\xi < x \quad ならば \quad f(\xi) < f(x)$$
$$\xi > x \quad ならば \quad f(\xi) > f(x)$$

この証明は等式(*12*)からただちに得られる．また，全く同じようにして次のことが証明される．与えられた x で微分係数 $f'(x)$ が負，つまり $f'(x) < 0$ ならば，x で $f(x)$ は減少である．すなわち，ある小さい正の数 δ が存在して，$|\xi - x| < \delta$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\xi < x \quad ならば \quad f(\xi) > f(x)$$
$$\xi > x \quad ならば \quad f(\xi) < f(x)$$

これらの結果から非常に重要な結論が得られる．すなわち，関数 $f(x)$ が x で最大値をとるならば，いいかえると変数のすべての値 ξ に対して不等式

$$f(x) \geqq f(\xi)$$

が成り立つならば，微分係数 $f'(x)$ は0に等しい．

さらにもっと強い次の結果が証明できる．関数 $f(x)$ が x で局所的最大値をとるならば，すなわち正の数 δ が存在して，$|\xi - x| < \delta$ のとき不等式

$$f(x) \geqq f(\xi) \tag{19}$$

が成り立つならば，

$$f'(x) = 0$$

である．

証明は背理法で行う．まず $f'(x) > 0$ と仮定する．そうすると，$f(x)$ は x で増加であるから，$\xi > x$ なる変数の値 ξ で，$\xi - x < \delta$ を満たすものが存在して

$$f(\xi) > f(x)$$

となる．これは(*19*)に反する．全く同じように $f'(x)$ は負になりえない．なぜなら，$f'(x) < 0$ のとき，$f(x)$ は x で減少である．したがって $\xi < x$ なる ξ で，$|\xi - x| < \delta$ を満たすものが存在して

$$f(\xi) > f(x)$$

となる．これは(*19*)に反する．これで局所的最大値をとる点で関数の微分係数は0になることが証明された．

全く同じようにして，次のことが証明される．関数 $f(x)$ が x で最小値をとるかあるいは局所的最小値をとる，つまり $|\xi - x| < \delta$ のとき $f(x) \leqq f(\xi)$ が成り立つような δ が存在するならば，この関数の微分係数は x で0である．

すなわち

$$f'(x) = 0$$

である．

したがって，関数 $f(x)$ の局所的最大値と局所的最小値を求めるためにはまず方程式

$$f'(x) = 0$$

を解かなければならない．その後でこの方程式を満たしているすべての x について詳細に研究しなければならない．なお，局所的最大値，局所的最小値は普通それぞれ単に最大値，最小値とよばれている．

例 3　今度は次のことを証明しよう．関数 $f(z)$ がこの節で述べた定義の意味で点 z_0 で連続ならば，すなわち，任意の正の数 ε に対して，適当な正の数 δ を選んで，

$$|z - z_0| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \tag{20}$$

とできるならば，$f(z)$ は 1 節の例 1 で述べられた定義の意味で z_0 で連続である．すなわち，条件

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \tag{21}$$

を満たす変数 z の値の任意の数列

$$z_1, \ z_2, \ \cdots, \ z_n, \ \cdots$$

に対して

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0) \tag{22}$$

が成り立つ．

証明のために，任意に正の数 ε を与え，条件(20)によってこの ε に対応する正の数を δ とする．(21)から，自然数 ν が存在して，$n > \nu$ ならば

$$|z_n - z_0| < \delta$$

が成り立つ．このとき(20)から

$$|f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon \tag{23}$$

が得られる．

ゆえに，任意の正の数 ε に対して，自然数 ν が存在して，$n > \nu$ ならば(23)が成り立つ．これは(22)が成り立つことを意味している．

以下では，連続性はこの節で述べた意味のものとする．

例 4　1節の終りのところで，数列に適用される極限移行に関する5つの基本規則が定式化された．同じ規則がこの節で述べた極限移行についても成り立つ．ここで，それらの規則を定式化しよう．

$f(z)$ と $g(z)$ は実変数または複素変数の2つの関数で，

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f_0, \quad \lim_{z\to z_0} g(z) = g_0$$

を満たしているものとする．このとき，次の規則が成り立つ．

規則 1

$$\lim_{z\to z_0}(f(z) + g(z)) = f_0 + g_0$$

規則 2

$$\lim_{z\to z_0}(f(z) - g(z)) = f_0 - g_0$$

規則 3

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)\cdot g(z)) = f_0\cdot g_0$$

規則 4　$g_0 \neq 0$ のとき

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_0}{g_0}$$

規則 5　$f(z)$ と $g(z)$ は実数値関数とし，

$$f(z) \leqq g(z) \quad ならば \quad f_0 \leqq g_0$$

である．

これらの規則の証明には，1節の場合と同じように無限小を用いる．そのため

$$f(z) = f_0 + \hat{f}(z)\,; \quad g(z) = g_0 + \hat{g}(z)$$

とおく．明らかに，$\hat{f}(z)$ および $\hat{g}(z)$ は $z - z_0$ とともに無限小である．さて，1節の終りのところで極限移行に関する規則の定式化に先立って無限小の最も簡単な性質を述べておいたが，この無限小の性質を用いるとここであげた5つの規則は難なく証明されよう．

11．微分係数の計算

ここで，いろいろの関数の微分係数を計算しよう．まず最初に，多項式と収束べき級数の微分係数を計算する．つぎに，収束べき級数に対する微分係数の

計算規則を用いて，e^z，$\cos z$，$\sin z$ の微分係数を求める．その後で，2つの関数の積と商の微分法の規則を確立する．さらに，合成関数，すなわち $f(z) = \psi(\varphi(z))$ の形の関数の微分法の規則および逆関数の微分法の規則を確立する．この最後の規則を用いて，逆三角関数と対数関数の微分係数を求める．

さて，最も簡単な微分法の規則を述べよう．

最初に，定数関数の微分係数は0であることを指摘しておこう．実際，$f(z) = c$ ならば，$f(\zeta) = c$．したがって，$f(\zeta) - f(z) = 0$．ゆえに

$$c' = 0 \tag{1}$$

今度は，関数 $f_1(z)$，$f_2(z)$，…，$f_n(z)$ とこれと同数の定数 α_1，α_2，…，α_n をとる．このとき，次の公式が成り立つ．

$$\begin{aligned}(\alpha_1 f_1(z) &+ \alpha_2 f_2(z) + \cdots + \alpha_n f_n(z))' \\ &= \alpha_1 f_1'(z) + \alpha_2 f_2'(z) + \cdots + \alpha_n f_n'(z)\end{aligned} \tag{2}$$

この公式は次の2つのもっと簡単な場合について証明すればよい．

$$(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z) \tag{3}$$

$$(\alpha f(z))' = \alpha f'(z) \tag{4}$$

さて，証明のときに，10節の例4で述べた極限の規則を用いる．はじめに，1番目の公式(3)を証明する．それは次のとおりである．

$$\begin{aligned}(f(z) + g(z))' &= \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) + g(\zeta) - (f(z) + g(z))}{\zeta - z} \\ &= \lim_{\zeta \to z} \left(\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} \right) \\ &= \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \lim_{\zeta \to z} \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} \\ &= f'(z) + g'(z)\end{aligned}$$

つぎに，2番目の公式(4)も同じように簡単に証明される．実際

$$(\alpha f(z))' = \lim_{\zeta \to z} \frac{\alpha f(\zeta) - \alpha f(z)}{\zeta - z} = \alpha \lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \alpha f'(z)$$

となる．

今度は，公式(3)と(4)を用いて公式(2)を証明しよう．証明は帰納法で行う．まず，$n = 1$ のとき(2)は(4)から得られる．つぎに，(2)は項の数が $n - 1$ のときに成り立つと仮定する．(2)の左辺を2つの項の和に分解する．すなわち，(2)の左辺を次の形に書きなおす．

$$((\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z) + \cdots + \alpha_{n-1} f_{n-1}(z)) + \alpha_n f_n(z))'$$

(*3*)と(*4*)からこの式は

$$(\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z) + \cdots + \alpha_{n-1} f_{n-1}(z))' + \alpha_n f_n'(z) \qquad (5)$$

に等しい．帰納法の仮定から，この式(*5*)は(*2*)の右辺に等しい．ゆえに，公式(*2*)は証明された．

公式(*2*)を多項式

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (6)$$

に適用すると

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)'$$
$$= a_0' + a_1(z)' + a_2(z^2)' + \cdots + a_n(z^n)'$$

が得られる．したがって，公式(*1*)を考慮すると多項式の微分係数を計算するには，変数 z の自然数乗，つまり z^k の微分係数を計算すればよい．ただし，k は自然数である．さて次の公式を証明しよう．

$$(z^k)' = kz^{k-1} \qquad (7)$$

実際，6節の(*11*)によって

$$(z^k)' = \lim_{\zeta \to z} \frac{\zeta^k - z^k}{\zeta - z} = \lim_{\zeta \to z}(\zeta^{k-1} + \zeta^{k-2} z + \cdots + z^{k-1}) = kz^{k-1}$$

となる（10節，例4の極限の規則参照）．したがって多項式(*6*)に対して次の形の微分係数が得られる．

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)' = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1} \qquad (8)$$

これで，実変数または複素変数の多項式に対して微分係数の公式が得られた．

べき級数の微分係数　次の命題を証明しよう．$f(z)$ はべき級数によって定義された関数とする．

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \qquad (9)$$

ただし，収束半径は $r > 0$ とする．このとき $f(z)$ は微分係数 $f'(z)$ をもつ．さらに，

$$f_1(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1} + \cdots \qquad (10)$$

とおく．そうすると

$$f'(z) = f_1(z) \qquad (11)$$

である．しかも(*9*)と(*10*)の収束半径は相等しい．

この命題を証明するためにまず増分比

$$\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$$

を計算する．ただし $|z|<r$ である．この増分比で $\zeta\to z$ として極限をとらなければならないので，$|\zeta|<r$ としてよい．

さて，$|z|<\rho<r$ とし，次の 3 つの収束正項級数を考える．

$$\hat{f}_0=|a_0|+|a_1|\rho+\cdots+|a_n|\rho^n+\cdots$$

$$\hat{f}_1=|a_1|+2|a_2|\rho+\cdots+n|a_n|\rho^{n-1}+\cdots$$

$$\hat{f}_2=2^2|a_2|+3^2|a_3|\rho+\cdots+n^2|a_n|\rho^{n-2}+\cdots$$

これらの級数の収束性は 2 節の(*17*)と 9 節の(*4*)から得られる．

つぎに増分比

$$\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$$

を級数で表そう．ただし，$|z|<\rho$，$|\zeta|<\rho$ とする．

$$\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}=\frac{a_0-a_0}{\zeta-z}+a_1\frac{\zeta-z}{\zeta-z}+\cdots+a_n\frac{(\zeta^n-z^n)}{\zeta-z}+\cdots \tag{12}$$

さらに，

$$\left|a_n\frac{(\zeta^n-z^n)}{\zeta-z}\right|=|a_n||\zeta^{n-1}+\zeta^{n-2}z+\cdots+z^{n-1}|\leqq|a_n|n\rho^{n-1}$$

である（6 節，(*11*)参照）．したがって，級数 $\hat{f}_1$ は(*12*)の優級数である．ゆえに，(*12*)は収束する．今度は(*12*)から(*11*)をひく．そうすると

$$\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}-f_1(z)$$

$$=a_2\left(\frac{\zeta^2-z^2}{\zeta-z}-2z\right)+\cdots+a_n\left(\frac{\zeta^n-z^n}{\zeta-z}-nz^{n-1}\right)+\cdots \tag{13}$$

となる．ここで，$\dfrac{\zeta^n-z^n}{\zeta-z}-nz^{n-1}$ を評価すると

$$\begin{aligned}\left|\frac{\zeta^n-z^n}{\zeta-z}-nz^{n-1}\right|&=|(\zeta^{n-1}-z^{n-1})+z(\zeta^{n-2}-z^{n-2})+\cdots\\&\quad+z^{n-2}(\zeta-z)+(z^{n-1}-z^{n-1})|\\&=|\zeta-z||(\zeta^{n-2}+\zeta^{n-3}z+\cdots+z^{n-2})\\&\quad+z(\zeta^{n-3}+\zeta^{n-4}z+\cdots+z^{n-3})+\cdots\end{aligned}$$

$$+ z^{n-2}| \leqq |\zeta - z| n^2\rho^{n-2}$$

が得られる．

したがって，級数 $\hat{f}_2$ に $|\zeta - z|$ を掛けて得られる級数は(*13*)の優級数である．このようにして

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f_1(z) \right| < |\zeta - z| c$$

が得られる．ただし，c は定数である．これから

$$\lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

が存在し，しかも $f_1(z)$ に等しいことがわかる．これで(*11*)が証明された．

最後に，級数(*9*)と(*10*)の収束半径が等しいことは，2節の(*17*)と9節の(*4*)から得られる．

等式(*10*)からただちに次の公式が得られる．

$$(e^z)' = e^z \tag{14}$$

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z \tag{15}$$

これらの公式はすべての z に対して収束する級数8節(*1*)〜(*3*)をそれぞれ項別に微分することによって得られる．したがって，(*14*)と(*15*)は任意の複素数ならびに実数 z に対して成り立つ．

さてつぎに，微分法のいくつかの基本公式について述べよう．すなわち，2つの関数の積の微分係数，2つの関数の商の微分係数それに関数の関数の微分係数をそれぞれ計算しよう．

積の微分係数　2つの関数 $f(z)$ と $g(z)$ に対して

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \tag{16}$$

が成り立つ．この公式を証明するために，差 $f(\zeta)g(\zeta) - f(z)g(z)$ を都合のよい形に書き表す．すなわち

$$f(\zeta)g(\zeta) - f(z)g(z) = f(\zeta)g(\zeta) - f(z)g(\zeta) + f(z)g(\zeta)$$
$$- f(z)g(z) = (f(\zeta) - f(z))g(\zeta) + f(z)(g(\zeta) - g(z))$$

この等式を $\zeta - z$ で割ると

$$\frac{f(\zeta)g(\zeta) - f(z)g(z)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} g(\zeta) + f(z) \frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z}$$

となる．

ここで $\zeta \to z$ として極限をとると，(*16*)が得られる．

商の微分係数　2つの関数 $f(z)$ と $g(z)$ に対して，$g(z) \neq 0$ のとき

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2} \tag{17}$$

が成り立つ．

この公式を証明するために，差

$$\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} - \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(\zeta)g(z) - f(z)g(\zeta)}{g(\zeta)g(z)} \tag{18}$$

を考える．まず，右辺の分子を書き換える．すなわち

$$\begin{aligned} f(\zeta)g(z) - f(z)g(\zeta) &= f(\zeta)g(z) - f(z)g(z) + f(z)g(z) \\ &\quad - g(\zeta)f(z) = (f(\zeta) - f(z))g(z) - f(z)(g(\zeta) - g(z)) \end{aligned} \tag{19}$$

つぎに，(*18*)を $\zeta - z$ で割り，(*19*)を用いて商を変形してから，$\zeta - z$ として極限をとると(*17*)が得られる．ここで

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad と \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

の微分係数を計算しよう．(*17*)と(*15*)から

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z} \quad と \quad (\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z} \tag{20}$$

が得られる．

合成関数 $f(z) = \psi(\varphi(z))$ の微分係数　2つの関数を $\varphi(z)$ と $\psi(w)$ とする．2番目の関数の w のところに $w = \varphi(z)$ を代入する．そうすると，いわゆる合成関数 $f(z) = \psi(\varphi(z))$，いいかえると関数の関数が得られる．この合成関数 $f(z) = \psi(\varphi(z))$ に対して

$$f'(z) = \psi'(w) \cdot \varphi'(z) = \psi'(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) \tag{21}$$

が成り立つ．微分係数の微分商の形の書き表し方（10節，(*15*)参照）を用いると，公式(*21*)は次のような覚えやすい形に書き換えることができる．

$$\frac{d\psi(w)}{dz} = \frac{d\psi(w)}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} \tag{22}$$

ただし，$w = \varphi(z)$ である．

さて，(*21*)を証明しよう．まず

$$\frac{\psi(\varphi(\zeta))-\psi(\varphi(z))}{\zeta-z}=\frac{\psi(\varphi(\zeta))-\psi(\varphi(z))}{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}\cdot\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z} \quad (23)$$

と変形する．微分係数 $(\psi(\varphi(z)))'$ を計算するためには，(23)で $\zeta\to z$ として極限をとらなければならない．このため，(23)の右辺の第1因数の分数は何であるか，もっと明確にしよう．$\varphi(z)=w$ であることを思い出し，$\varphi(\zeta)=\omega$ とおく．そうすると明らかに，$\zeta\to z$ ならば $\omega\to w$ である．したがって，(23)で $\zeta\to z$ として極限を計算するためには，

$$\lim_{\omega\to w}\frac{\psi(\omega)-\psi(w)}{\omega-w}$$

を計算する必要がある．ところがこれは定義によって $\psi'(w)$ に等しい．ゆえに，(23)で $\zeta\to z$ として極限をとると

$$\psi(\varphi(z))'=\psi'(w)\cdot\varphi'(z)$$

が得られる．これは(21)にほかならない．

逆関数の微分係数　　方程式 $z=\psi(w)$ を w について解くことができるとき，すなわち恒等式

$$\psi(\varphi(z))=z \quad (24)$$

が成り立つような関数 $w=\varphi(z)$ を求めることができるとき，関数 $\varphi(z)$ を $\psi(w)$ の**逆関数**という．24節で，べき級数で表される関数に対してべき級数で表される逆関数が存在することが証明されよう．

さて，(24)を z で微分すると，(21)によって

$$\psi'(w)\cdot\varphi'(z)=1$$

が得られる．これより

$$\varphi'(z)=\frac{1}{\psi'(w)} \quad (25)$$

となる．(25)の右辺で $w=\varphi(z)$ とおくと

$$\varphi'(z)=\frac{1}{\psi'(\varphi(z))} \quad (26)$$

が得られる．この公式によって関数 $\psi(w)$ の逆関数 $\varphi(z)$ の微分係数 $\varphi'(z)$ が計算できる．この(26)で $\varphi'(z)$ を計算するためには，まず $\psi'(w)$ の w に，w を表す z の式，つまり $w=\varphi(z)$ を代入し，その後で $\psi'(\varphi(z))$ の逆数をとらなければならない．

つぎに，この公式を用いて，e^w，$\sin w$，$\cos w$，$\tan w$，$\cot w$ の逆関数，

すなわち $\log z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\arctan z$, $\operatorname{arccot} z$ の微分係数をそれぞれ計算してみよう．その結果次の公式が得られる．

$$(\log z)' = \frac{1}{z} \tag{27}$$

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,; \quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \tag{28}$$

$$(\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2}\,; \quad (\operatorname{arccot} z)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{29}$$

さて，$\log z$ は w についての方程式 $e^w = z$ の解として定義される関数である．(*26*)から

$$(\log z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

が得られる．

公式(*28*)については最初の公式だけを証明する．$\arcsin z$ は w についての方程式 $\sin w = z$ の解として定義される関数である．したがって(*26*)から

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{(\sin w)'} = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 w}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

が得られる．

公式(*29*)についても最初の公式だけを証明する．すなわち

$$(\arctan z)' = \frac{1}{(\tan w)'} = \cos^2 w = \frac{1}{1+\tan^2 w} = \frac{1}{1+z^2}$$

となる．

最後に，z^r の微分係数を計算しよう．ただし，r は任意の実数である．r が有理数の場合はこの関数は初等代数で定義されている．r が任意の実数の場合，この関数を

$$z^r = e^{r \log z} \tag{30}$$

とおいて定義する．r が有理数のとき，この等式は初等代数で与えられているものである．さて，$w = r \log z$ とおき，(*27*)を考えに入れ，(*30*)の右辺に合成関数の微分法の公式(*21*)を適用して，z^r の微分係数を計算してみよう．このとき

$$(z^r)' = \frac{de^w}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} = e^w \frac{dw}{dz} = e^w \cdot r \cdot \frac{1}{z} = e^{r \log z} \cdot r \cdot \frac{1}{z}$$

$$= rz^r \cdot \frac{1}{z} = rz^{r-1}$$

が得られる．ゆえに

$$(z^r)' = rz^{r-1} \tag{31}$$

である．

8節で述べたように，基本的な超越関数は e^z，$\sin z$，$\cos z$，$\tan z$，$\cot z$ とこれらの逆関数である．またここで，多項式，有理関数つまり2つの多項式の商として得られる関数，累乗根を求める方法で得られる関数を代数的な関数とよぶ．さらに，基本的な超越関数と代数的な関数を演算として適用する方法で，一般にこれらの関数を任意回任意の順序でつぎつぎに適用する方法で得られる関数を初等的な超越関数とよぶことにする．そうすると，この節で述べた微分法の規則を用いて，どの初等的な超越関数についても微分係数を計算することができる．

例1　ここで微分係数の力学的意味を述べてみよう．点が横軸上を運動しているとしよう．したがって点の座標は時間の関数である．

$$x = f(t) \tag{32}$$

点が一定速度で運動しているならば，(32)は

$$x = x_0 + vt$$

で表される．ただし，x_0 は $t = 0$ のときの最初の点の位置で，v は定数で速度を表す．点の速度が一定でないならば，与えられた瞬間 t における速度はどれくらいであるか，明らかにする必要がある．瞬間 t と並んで別の瞬間 $\tau > t$ をとろう．そうすると $\tau - t$ の間に点が動く距離は $f(\tau) - f(t)$ に等しい．したがって，t から τ までの間の点の平均速度は $\dfrac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t}$ に等しいと見なすのは自然なことである．瞬間 t における点の速度は，$\tau \to t$ のときの平均速度を表すこの比の極限，すなわち $f'(t)$ と定義する．

$$v(t) = f'(t)$$

つぎに，速度が一定でないならば，すなわち時間 t とともに変わるならば，加速度が問題になる．t から τ までの平均加速度を $\dfrac{v(\tau) - v(t)}{\tau - t}$ と定義し，t における加速度はこの比の $\tau \to t$ のときの極限，すなわち $u(t) = v'(t)$ と定義

する．そうすると $v'(t)$ は微分係数 $f'(t)$ の微分係数であることがわかる．それを $f(t)$ の 2 次微分係数といい，$f''(t)$ で表す．したがって，点の加速度は $u(t) = f''(t)$ で与えられる．

12. 不 定 積 分

10 節と 11 節で微分係数について述べた．そこでは，実変数または複素変数 z の関数（ここでは $h(z)$ で表す）に対して同じ変数 z の関数としての微分係数，すなわち導関数 $h'(z)$ が構成された．関数 $h(z)$ の導関数 $h'(z)$ を表すのにしばしば別の記号が使われる．すなわち

$$h'(z) = \frac{dh(z)}{dz}$$

と書き表される（10 節，(*15*)参照）．関数 $h(z)$ を関数

$$f(z) = h'(z) \tag{1}$$

に移す演算を，$h(z)$ の**導関数をとる演算**または $h(z)$ に対する**微分演算**という．

数学者が何らかの演算を考察するとき，いつも起こってくるのはこの演算の逆演算の問題である．たとえば，代数では乗法の演算と並んでその逆演算である除法が考察されているし，累乗の演算と並んで累乗根の演算が考察されている．また，逆演算について考えるとき，つねに 2 つの重要な問題を提起する必要がある．第 1 は逆演算が可能かどうかであり，第 2 は逆演算は一意かどうかである．たとえば，除法はつねに可能であるとは限らない．なぜなら 0 で割ろうと思ってもそれは不可能である．また，累乗根をとる場合一意的であるとは限らない．たとえば与えられた数の平方根は原則として 2 つの値をもっている．

さて，微分演算の逆演算，すなわち $f(z) = h'(z)$ を満たす $h(z)$ を求める演算を，**積分演算**といい，次のように特別な形で書き表す．

$$h(z) = \int f(z)dz \tag{2}$$

記号 $\int$ は**インテグラル**といい，この式(*2*)を次のように読む．

　　$h(z)$ はインテグラル $f(z)dz$ に等しい．

積分演算は微分演算の逆演算であるということは，(*1*)と(*2*)が同等であることを間違いなく意味している．

条件(*1*)を満たす関数 $h(z)$ は関数 $f(z)$ の**原始関数**とよばれている．したがって積分するということは原始関数を求めることである．

積分演算に関する第1の基本問題，すなわち積分演算の可能性の問題に対して，この節では一般的な答えを出さないことにして，いろいろな場合に積分演算が実際に可能で，その結果を容易に書き表せることだけを指摘しておこう．たとえば

$$\int \cos z dz = \sin z, \quad \int \sin z dz = -\cos z \tag{3}$$

この等式は11節の(*15*)から得られる．全く同じようにして次の等式が確かめられる．

$$\int (\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n) dz = \alpha_0 z + \frac{\alpha_1}{2} z^2 + \frac{\alpha_2}{3} z^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1} z^{n+1} \tag{4}$$

この等式は11節の(*8*)から得られる．したがって，いろいろの場合に積分演算は可能で，その研究をとおして十分に内容豊富な研究が行えるであろう．

積分演算の第2の基本問題，すなわち一意性の問題に対して，この節で完全な答えを出すことができる．まず第1に，積分演算は一意的でないことは明らかである．すなわち(*2*)が成り立つならば，

$$\int f(z) dz = h(z) + c \tag{5}$$

も成り立つ．ただし，c は任意定数である．この(*5*)は

$$(h(z) + c)' = h'(z) + c' = h'(z)$$

から得られる（11節，(*1*)，(*3*)参照)．

したがって，積分は定数差を無視しなければ定まらない．それゆえに，

$$\int f(z) dz$$

を不定積分という．この節で，積分が定まらないのもこの定数差の範囲内であることを証明する．すなわち次のことを証明しよう．

$$\int f(z) dz = h_1(z), \quad \int f(z) dz = h_2(z) \tag{6}$$

ならば

$$h_2(z) = h_1(z) + c \tag{7}$$

である．ただし，c は定数である．しかし，この命題はある条件の下でのみ成り立つこと，すなわち，関数 $f(z)$ は連結集合 Ω で定義されている場合，いいかえると変数 z の許容値全体の集合が連結集合 Ω である場合にのみ成り立つということに注意しておく．

いまここでまず述べる必要があるのは，連結集合 Ω とは何かということである．実変数の場合，集合 Ω の連結性とは，z_0 と z^* を，関数 $f(z)$ の変数 z の 2 つの許容値で，しかも $z_0 < z < z^*$ とすれば，不等式 $z_0 < z < z^*$ を満たすすべての z は $f(z)$ の変数の許容値になっていること，つまり Ω に属していることを意味する．複素変数 z の場合，集合 Ω は複素数平面上の集合で，この場合の連結性の意味は実数の場合と同じではない．すなわち，z_0 と z^* を $f(z)$ の変数の 2 つの許容値，つまり Ω に属する複素数平面上の 2 点とすれば，折線

$$z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_n = z^* \tag{8}$$

が存在して，この折線が完全に Ω の中を通ることである．(8)にはこの折線の頂点だけが示されている．折線自体は次の形の線分全体から構成されている．

$$[z_j z_{j+1}] \quad \text{ただし，} j = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

折線(8)が集合 Ω の中を通るというのは，各線分 $[z_j z_{j+1}]$($j = 0$, 1, $\cdots$, $n - 1$) が Ω に含まれることである．

さて，(6)から(7)が得られることを証明するためには

$$h'(z) = 0 \tag{9}$$

から

$$h(z) = c \tag{10}$$

が得られることを証明すれば十分である．ただし，c は定数である．またこの場合，集合 Ω で関数 $h(z)$ が定義されており，しかも Ω は連結であると仮定する．ところで，$h(z) = h_2(z) - h_1(z)$ とおけば，(10)から(7)が得られる．

つぎに，(9)から(10)を導く証明の段階に移ろう．しかしこの証明は簡単ではない．まず証明に先行してそれ自身重要ないくつかの命題を証明しなければならない．

連続関数の最大値と最小値　$h(x)$ を実変数 x の実数値連続関数で，区間

$$a \leqq x \leqq b \tag{11}$$

で定義された関数とする．ただし，a と b は実数で，$a < b$ とする．したがっ

て，関数 $h(x)$ の変数 x の値として考えられるのは不等式(11)を満たす実数であって，変数のほかの値は考察の対象にはならない．さて，このとき次の結果が成り立つ．この関数は最小値と最大値をとる．すなわち，関数 $h(x)$ の変数の値 $x=\alpha$ と $x=\beta$ が存在して，不等式(11)を満たすすべての x に対して，不等式

$$h(\alpha) \leqq h(x) \leqq h(\beta) \tag{12}$$

が成り立つ．後の例2で示されるように，不連続関数はこの性質をもっていない．したがって，ここでの連続性の条件は非常に本質的である．

まず最初に，関数 $h(x)$ は有界であることを証明しよう．証明は背理法で行う．$h(x)$ は有界でないと仮定する．そうすると，各自然数 n に対して，$x=\gamma_n$ を適当にとって，不等式

$$|h(\gamma_n)| > n \tag{13}$$

が成り立つようにできる．γ_n は区間 $a \leqq x \leqq b$ の中にあるから，数列

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_n,\ \cdots \tag{14}$$

から収束する部分列

$$\delta_1 = \gamma_{n_1},\ \delta_2 = \gamma_{n_2},\ \cdots,\ \delta_k = \gamma_{n_k},\ \cdots \tag{15}$$

を選び出すことができる．しかもこの部分列の極限

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \delta$$

は区間 $[ab]$ に属する（4節，有界集合と1節，(18)参照）．$h(x)$ は連続であるから

$$\lim_{k\to\infty} h(\delta_k) = h(\delta)$$

である．しかしこれは不可能である．なぜなら，(15)は(14)の部分列であり，したがって不等式(13)によって $|h(\delta_k)|$ は k が大きくなると限りなく大きくなるからである．これで，$h(x)$ の形の数全体の集合は上にも下にも有界であることが証明された．したがって，この集合は下限と上限をもつ．下限を p とし上限を q とする．q は $h(x)$ の形の数全体の集合の上限であるから，この集合から q に収束する数列を選び出すことができる．このことは，変数 x の値の数列

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n,\ \cdots \tag{16}$$

で，条件

$$\lim_{n\to\infty} h(\mu_n) = q \tag{17}$$

を満たすものが存在することを意味している．

数列(*16*)は区間$[ab]$に属しているから，この数列から収束する部分列

$$\nu_1 = \mu_{n_1},\ \nu_2 = \mu_{n_2},\ \cdots,\ \nu_k = \mu_{n_k},\ \cdots \tag{18}$$

を選び出すことができる．そこで

$$\lim_{k\to\infty} \nu_k = \beta$$

とおく．(*18*)は(*16*)の部分列であるから，(*17*)より

$$\lim_{k\to\infty} h(\nu_k) = h(\beta) = q$$

が得られる．

したがって，$h(x)$の形の数全体の集合の上限qは$x=\beta$における$h(x)$の値である．このことはまさに，$h(x)$は$x=\beta$において最大値をとることを意味している．全く同じようにして，$h(x)$はある$x=\alpha$において最小値をとることが証明される．

系（ロールの定理）　今度は，上で考察した連続関数$h(x)$は$a<x<b$を満たすすべてのxにおいて微分係数をもち，さらに区間$[ab]$の端点における関数の値は相等しい．つまり$h(a)=h(b)$と仮定しよう．このとき，区間$[ab]$の内部にあるξが存在して（すなわち$a<\xi<b$なるξが存在して）

$$h'(\xi) = 0 \tag{19}$$

となる．

このことを証明しよう．$h(x)$が定数ならば$h(x)$の微分係数は区間$[ab]$の内部において恒等的に0であるから，ξとしてこの区間の内部の任意の点をとることができる．$h(x)$が定数でないならば，次の2つの場合の中の少なくとも1つが成り立つ．第1は，xのある値において$h(x)$は$h(a)$より大きい．第2は，xのある値において$h(x)$は$h(a)$より小さい．第1の場合，$h(x)$は区間$[ab]$の内部のある点ξで最大値をとる．第2の場合，$h(x)$は区間$[ab]$の内部のある点ξで最小値をとる．どちらの場合も，$x=\xi$において$h(x)$の微分係数は0に等しい．すなわち，(*19*)が成り立つ（10節，例2参照)．

有限増分（ラグランジュの公式）　区間$[x_0x_1]$において与えられた実変数xの実数値連続関数$h(x)$は区間$[x_0x_1]$の内部のすべての点で微分係数をもつと仮定しよう．このとき，次の等式が成り立つ．

$$h(x_1) - h(x_0) = h'(\xi)(x_1 - x_0) \tag{20}$$

ただし，ξ は区間 $[x_0x_1]$ の内部の 1 つの点である．証明のため，関数

$$g(x) = h(x) - \frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0}x \tag{21}$$

を調べる．$g(x)$ は x_0 と x_1 において同じ値をとる．実際

$$g(x_1) - g(x_0) = h(x_1) - h(x_0) - \frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) = 0$$

したがって，ロールの定理によって，区間 $[x_0x_1]$ の内部に点 ξ が存在して

$$g'(\xi) = 0$$

となる（(*19*)参照）．この等式に $g(\xi)$ に対する式(*21*)を代入すると

$$h'(\xi) - \frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0} = 0$$

が得られる．これから(*20*)が得られる．

ラグランジュの公式(*20*)からすぐわかるように，実変数 x の実数値関数 $h(x)$ の場合次の基本命題が成り立つ．すなわち

$$h'(x) = 0 \tag{22}$$

（(*9*)参照）ならば

$$h(x) = C$$

（(*10*)参照）である．実際，(*22*)から(*20*)の $h'(\xi)$ は 0 である．したがって(*20*)によって $h(x_1) = h(x_0)$ である．ここで，x_0 と x_1 は，連結集合上で与えられた関数 $h(x)$ の変数の任意の 2 つの値である．したがって，$h(x)$ は定数である．

つぎに，実変数 x の複素数値関数 $h(x)$ に対して基本命題を証明しよう．$h(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ とおく．ただし，$\varphi(x)$ と $\psi(x)$ は実変数 x の実数値関数である．11 節の(*2*)から $h'(x) = \varphi'(x) + i\psi'(x)$ となる．したがって，$h'(x) = 0$ から $\varphi'(x) = 0$ かつ $\psi'(x) = 0$ が得られる．したがって，いま証明されたことから $\varphi(x)$ も $\psi(x)$ も定数である．ゆえに $h(x)$ もまた定数である．

複素変数の場合の(*10*)の証明　はじめに，折線(*8*)が 1 つの線分 $[z_0z_1]$ からなる場合について考えよう．このため線分 $[z_0z_1]$ 上に実パラメータ t を導入し

$$z = z_0(1 - t) + z_1t \tag{23}$$

とおく．実パラメータ t が 0 から 1 まで変化すると，(*23*)で与えられた点 z は線分 $[z_0z_1]$ 上を端点 z_0 から z_1 まで動く．さて，線分 $[z_0z_1]$ 上の関数 $h(z)$ を，

$$\hat{h}(t) = h(z_0(1-t)+z_1t)$$

とおいて，実パラメータ t の関数として考察しよう．そうすると

$$\hat{h}'(t) = h'(z_0(1-t)+z_1t)\cdot(z_1-z_0)$$

となる（11 節，(*21*)参照）．$h'(z)$ は $[z_0z_1]$ 上で 0 であるから，$\hat{h}'(t)$ は区間 $0 \leqq t \leqq 1$ 上で 0 である．したがって，$\hat{h}(t)$ は定数である．すなわち $\hat{h}(1) = \hat{h}(0)$ である．ところが $\hat{h}(0) = h(z_0)$，$\hat{h}(1) = h(z_1)$ であるから，$h(z_1) = h(z_0)$ である．つぎに，折線(*8*)が任意個の線分から構成されている場合，$h(z)$ は各線分の端点においていろいろの値をとる．このとき，次の等式が成り立つ．

$$h(z_0) = h(z_1)$$
$$h(z_1) = h(z_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h(z_{n-1}) = h(z_n) = h(z^*)$$

これから

$$h(z^*) = h(z_0)$$

が得られる．したがって，任意の値 z^* に対して関数の値 $h(z^*)$ は定まった値 $h(z_0)$ に等しい．ゆえに，$h(z)$ は定数である．

多変数関数の場合　被積分関数が 1 つの変数ではなくいくつかの変数に依存する関数の場合，たとえば $f(z,\ w)$ の形の式で与えられる 2 変数関数の場合，2 つの変数の中のどの変数について積分するのか，はっきり示す必要がある．もっともこのことは式(*2*)自体によって十分明らかに示されてはいる．式の中の記号 dz は z について積分することを意味しているからである．ところで，$f(z,\ w)$ に対して積分

$$\int f(z,\ w)dz$$

自体は当然 2 つの変数 z と w に依存している．したがって，(*1*)は

$$f(z,\ w) = \frac{\partial}{\partial z}h(z,\ w)$$

の形になる（10 節，(*17*)参照）．この場合

$$\frac{\partial}{\partial z}h(z,\ w)=0$$

から，$h(z,\ w)=c(w)$ が得られる．ただし，$c(w)$ は w の任意の関数である．したがっていまの場合(7)の代わりに

$$h_2(z,\ w)=h_1(z,\ w)+c(w)$$

が得られる．

例 1　関数 $h(z)$ の変数 z の許容値全体の集合が連結でないならば，$h(z)$ の導関数 $h'(z)$ が 0 に等しくても $h(z)$ 自体は定数にならないことがある．例として，実変数 x の実数値関数 $\operatorname{sign} x$ をあげよう．関数 $\operatorname{sign} x$ は 0 以外のすべての実数に対して定義されており，しかも正の数 x に対して $\operatorname{sign} x=1$ で，負の数 x に対して $\operatorname{sign} x=-1$ である．$\operatorname{sign} x$ の変数 x の許容値全体の集合は，$x=0$ を除く実数全体の集合で，連結集合でない．$\operatorname{sign} x$ の微分係数はすべての点で 0 である．しかし $\operatorname{sign} x$ は定数でない．

例 2　実変数 x の関数 $h(x)$ を，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上で次の条件によって定義する．

$$h(0)=0$$

$$x>0 \quad \text{のとき，} h(x)=1-x$$

明らかにこのように定義された関数 $h(x)$ は不連続である．つまり，$h(x)$ は $x=0$ で不連続である．ところで，この関数は最大値をとらない．なぜなら関数値全体の集合の上限は 1 であり，この関数は 1 を値としてとらないからである．

例 3　一定の加速度 a で移動する点の運動の方程式を求めよう．$x=f(t)$ によって横軸上を運動する点 x の瞬間 t における座標を表す．そうすると，関数 $f(t)$ に対して $f''(t)=a$ が成り立つ．(4)と(7)によって

$$f'(t)=v_0+at \tag{24}$$

が成り立つ．ただし，v_0 は $t=0$ における点の速度である．さらに，同じ(4)と(7)によって(24)から

$$f(t)=x_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$$

が得られる．ただし，x_0 は $t=0$ のときの点の位置である．これはよく知られている等加速度運動の方程式である．

13. 不定積分の計算

ここで，積分を求めるのに有用ないくつかの規則について述べることにしよう．まず，11 節で与えられた微分法の公式からただちに対応する積分法の公式が得られる．なお，各公式の右辺には任意定数 c がはいっていることを注意しておく．

べき級数の積分 11 節のべき級数の微分法の公式(*10*)からべき級数の積分法の公式が得られる．

$$\int(a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n + \cdots)dx$$

$$= c + a_0z + a_1\frac{z^2}{2} + a_2\frac{z^3}{3} + \cdots + a_n\frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (1)$$

ここでこの 2 つのべき級数の収束半径は相等しいことを指摘しておかなければならない．

基本的な関数の積分

$$\int e^z dz = c + e^z \quad (2)$$

$$\int \sin z dz = c - \cos z, \quad \int \cos z dz = c + \sin z \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 z} dz = c + \tan z, \quad \int \frac{1}{\sin^2 z} = c - \cot z \quad (4)$$

上の公式は 11 節の(*14*)，(*15*)，(*20*)からただちに得られる．

$$\int \frac{dz}{z} = c + \log z \quad (5)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz = c + \arcsin z \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{1+z^2} dz = c + \arctan z \quad (7)$$

これらの公式は 11 節の(*27*)～(*29*)から得られる．

いまのところ関数の積分を式の形で書き表せるのは，この関数が以前にある関数の導関数として得られた場合だけである．したがって積分法の立場は微分法の立場とはっきりと違っている．11 節で説明された規則によって任意の初

等的な超越関数の導関数を求めることができるし，それを別の初等的な超越関数の形で書き表すことができる．しかし初等的な超越関数の積分はいつも初等的な超越関数の形で書き表すことができるとは限らない．しかもこのように書くことが可能な場合でも実際にその形を求めることは非常にむずかしい．しかし，被積分関数を，ある既知の関数の導関数になっているほかの関数への変換を可能にしているいくつかの規則が存在している．ここで，2つのこの種の規則について述べよう．(1)置換積分法，(2)部分積分法とである．

置換積分法　　関数 $f(z)$ がある関数 $h(z)$ の導関数であることがわかっているならば，すなわち

$$f(z) = h'(z)$$

あるいは

$$\int f(z)dz = h(z)$$

ならば，いいかえると，$f(z)$ の積分が z の式で書き表すことができるならば，変数の置換 $z = \psi(w)$ によって，積分が容易に書き表せる新しい関数 $g(w)$ を求めることができる．そのためには，$z = \psi(w)$ を $h(z)$ の z に代入し，関数 $h(\psi(w))$ の導関数を計算すればよい．

$$(h(\psi(w)))' = h'(\psi(w))\cdot\psi'(w) = f(\psi(w))\psi'(w)$$

したがって

$$g(w) = f(\psi(w))\psi'(w) \tag{8}$$

とおくと

$$\int g(w)dw = h(\psi(w))$$

が得られる．このようにして，$f(z)$ の積分が書き表せるならば，$z = \psi(w)$ とおくことによって新しい関数 $g(w)$ が得られ（(8)参照)，この関数の積分は容易に求まる．また，明らかに $g(w)$ から逆に $f(z)$ が置換 $w = \varphi(z)$ によって得られる．ただし，$\varphi(z)$ は $\psi(w)$ の逆関数である．さて，$f(z)$ と $g(w)$ の間の関係はたいへん簡単である．この関係は $z = \psi(w)$ を積分記号の下の式に代入すれば，すなわち $f(z)dz$ において，$f(z)$ の z と，dz の z をそれぞれ $\psi(w)$ で置き換えるならば，全く機械的なものになってしまう．実際，

$$f(z)dz = f(\psi(w))d\psi(w) = f(\psi(w))\psi'(w)dw$$

である（10 節，(*14*)参照）．変数 z の被積分関数を置換 $z=\psi(w)$ によって変数 w の被積分関数に変えるこの形式的な操作から，積分記号の下に記号 dz ——独立変数の微分を表す記号——が書かれているということも納得できるであろう．最後に，この置換積分法を簡単な例で説明しよう．関数 $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ の積分を考えてみよう．ただし，$\varphi(z)$ は与えられた関数である．すなわち

$$\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz \tag{9}$$

を計算してみよう．

置換 $\varphi(z)=w$ によって上に述べた規則から積分(*9*)は次のように書き換えることができる．

$$\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz=\int \frac{dw}{w}=c+\log w=c+\log \varphi(z) \tag{10}$$

部分積分法　積の微分法の規則は

$$(u(z)v(z))'=u'(z)v(z)+u(z)v'(z)$$

である（11 節，(*16*)参照）．これから

$$\int u(z)v'(z)dz+\int v(z)u'(z)dz=c+uv$$

が得られる．ここで

$$u'(z)dz=du(z),\quad v'(z)dz=dv(z)$$

とおくと，

$$\int u(z)dv(z)+\int v(z)du(z)=c+u(z)v(z)$$

あるいは，同じことであるが

$$\int u(z)dv(z)=c+u(z)v(z)-\int v(z)du(z) \tag{11}$$

が得られる．この等式は**部分積分法の公式**とよばれている．この公式は右辺の積分が左辺の積分よりも計算しやすいときに適用される．

例 1　ここで微分法と積分法の自然科学への応用例を述べてみよう．このため，体積の変えられる容器，たとえばピストン付きのシリンダーの中に入れてある理想気体の状態変化を調べてみよう．また，シリンダーに閉じ込められている気体については，周囲の環境との熱交換はないとし，シリンダーは摩擦なしに動くものとし，さらに気体の質量は 1 グラム分子に等しいと仮定する．

シリンダー内の気体の圧力を P，体積を V，絶対温度を T とする．このとき，よく知られたクラペイロンの関係式

$$PV = RT \tag{12}$$

が成り立つ．ただし，R は定数で，気体の種類に関係しない．物理学から引用する第2の関係式は，シリンダー内の気体の内部エネルギー U を与えるもので

$$U = C_v T$$

が成り立つ．ただし，C_v は定数で，シリンダー内の気体に関係するが，気体の種類には関係しない．定数 C_v の物理的な意味を明らかにするために，シリンダー内の気体を，温度が T_1 から T_2 になるまで気体の体積を変えないで，つまりピストンを動かさないで加熱する．このとき，気体の内部エネルギーは $C_v(T_2 - T_1)$ だけ増加する．この加熱の過程で気体はどんな仕事もしない（ピストンは動かない）から，気体に加えられたすべての熱は気体の温度の上昇をもたらすことになる．したがって，C_v は体積が一定の場合の気体の熱容量である．

つぎに，σ でシリンダーの切口の面積を表し，l でシリンダーの底面からピストンまでの距離を表す．そうすると，$V = \sigma l$ である．今度はピストンの位置をわずかに変えて，すなわち，l が微小量 δl だけ短くなるように，気体をほんの少し圧縮する．このとき，気体の体積 V は $\delta V = \sigma\delta l$ だけ小さくなる．気体の圧縮のこの過程において，ピストンに対する気体の圧力は近似的にほぼ σP に等しい．したがって，いまの圧縮で圧力はほんの少し変わり，$F = \sigma(P + \varepsilon)$ に等しくなる．ただし，ε は δl とともに0に近づく量である．物理学の周知の法則により，ピストンが移動することによってなした仕事はピストンが δl だけ移動する間に働いた力に等しい．したがって，この仕事は

$$-P\sigma(\delta l + o(\delta l))$$

に等しい．いいかえると

$$-P\delta V + o(\delta V)$$

に等しい．摩擦と熱交換がないので，この仕事は全部気体の内部エネルギーに変わらなければならない．すなわち，気体の内部エネルギー $U = C_v T$ は $C_v\delta T$ だけ増加しなければならない．したがって

$$C_v\delta T = -P\delta V + o(\delta V) \tag{13}$$

が成り立つ．P をクラペイロンの公式で計算すると

$$P = \frac{RT}{V}$$

が得られる．この値を(*13*)に代入すると

$$C_v \delta T = -RT\frac{\delta V}{V} + o(\delta V) \tag{14}$$

が得られる．気体の圧縮の過程で，温度 T は気体の体積 V の関数であるから，(*14*)を $T\delta V$ で割ると

$$\frac{C_v}{T}\cdot\frac{\delta T}{\delta V} = -\frac{R}{V} + \frac{o(\delta V)}{T\delta V}$$

が得られる．この式で $\delta V \to 0$ として極限をとると

$$\frac{C_v}{T}\frac{dT}{dV} = -\frac{R}{V}$$

すなわち

$$\frac{C_v}{T}\frac{dT}{dV} + \frac{R}{V} = 0 \tag{15}$$

が得られる．したがって，前節の基本結果によって(*15*)の左辺の不定積分は定数である．したがって

$$\int\left(\frac{C_v}{T}\frac{dT}{dV} + \frac{R}{V}\right)dV = c$$

すなわち

$$\int\frac{C_v dT}{T} + \int\frac{RdV}{V} = c$$

が成り立つ．(*10*)から

$$C_v \log T + R \log V = C$$

となる．これを C_v で割り，それを e の肩にのせると

$$TV^{\frac{R}{C_v}} = \hat{c}$$

が得られる．ただし，$\hat{c}$ は積分の結果生じてくる定数である．したがってシリンダー内の気体だけに関係し，その種類には関係しない定数である．最後の式に(*12*)の T を代入すると

$$PV^{\frac{R+C_v}{C_v}} = \tilde{c} \tag{16}$$

が得られる．ただし，$\tilde{c}$ は定数で，シリンダー内の気体に関係するが，その

種類には関係しない．

C_v はすでに注意したように体積一定のときの気体の熱容量である．$C_p = R + C_v$ は容易にわかるように圧力が一定のときの気体の熱容量である．なぜなら，気体が一定の圧力を保存しながら加熱されると，消費される熱は一部は気体の内部エネルギーの増加をもたらし（すなわち，温度が上昇し），一部はピストンを動かす力学的仕事に変わるからである．

ゆえに，(16)は次の形の式に書くことができる．

$$PV^{\gamma} = \tilde{c} \tag{17}$$

ただし，$\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ である．

この(17)は**気体の断熱圧縮の公式**とよばれている．

例 2　部分積分法を用いて関数 $f(z) = u(z)e^z$ の積分を求めてみよう．ただし，$u(z)$ は変数 z の n 次の多項式である．$v(z) = e^z$ とおく．したがって $dv(z) = e^z dz$．部分積分法から

$$\int f(z)dz = \int u(z)e^z dz = \int u(z)dv(z)$$

$$= c + u(z)e^z - \int e^z du(z) = c + u(z)e^z - \int u'(z)e^z dz$$

となる．したがって，$u(z)e^z$ の積分を求めることは $u'(z)e^z$ の積分を求めることに帰着した．ところが，$u(z)$ は多項式であるから $u'(z)$ も多項式でしかも次数が 1 次だけ低い．このことから，部分積分法を繰り返し適用すればよいことがわかる．その結果は次の形で書くことができる．

$$\int u(z)e^z dz = c + u(z)e^z - u'(z)e^z + u''(z)e^z + \cdots$$

$$+ (-1)^n u^{(n)}(z)e^z$$

$$= c + e^z(u(z) - u'(z) + u''(z) + \cdots$$

$$+ (-1)^n u^{(n)}(z))$$

ここで，導関数と 2 次導関数だけでなく任意次数の高次導関数が必要である．この高次導関数は自然な方法で定義される（詳細については 15 節の(2)を参照すること）．

例 3　べき級数の項別積分の公式(1)を使うと，$\log(1 + x)$ と $\arctan z$ のべき級数展開が得られる．11 節の(27)と(29)によって

$$(\log(1+z))' = \frac{1}{1+z}, \quad (\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2}$$

この等式の右辺の関数は，等比級数の和の公式（6節，(*21*)参照）に基づいて，収束半径1のべき級数に容易に展開することができる．まず次の等式が成り立つ．

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots$$

これらの等式を(*1*)を用いて項別積分すれば，$\log(1+z)$ および $\arctan z$ の収束半径1をもつ z のべき級数展開が得られる．しかしここでまだ(*1*)の右辺の定数 c の値を決定する問題が残っている．この定数の値を求めるためには，z に何か適当な値を，たとえば0を代入して，等式(*1*)から c の値を計算すればよい．したがって，$\log 1$ および $\arctan 0$ の値を知る必要がある．ところが，$\log z$ も $\arctan z$ も1価関数でないので，これらの値も次のようになる．

$$\log 1 = 2k\pi i, \quad \arctan 0 = k\pi$$

ただし，k は任意の整数である．$\log 1$ および $\arctan 0$ の値を1つ定めるために，これらの値の中から何か1つ選べば，$z=0$ のとき定められた値をとる $\log(1+z)$ および $\arctan z$ のべき級数展開が得られる．いま，$\log 1$ も $\arctan 0$ も値として0を選ぶ．このとき，どちらの場合も定数 c は0になるから，次のべき級数展開が得られる．

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

終りに強調しておかなければならないのは，いま得られた $\log(1+z)$ および $\arctan z$ のべき級数展開は半径1の円において，$\log(1+z)$ および $\arctan z$ の $z=0$ で0になる分岐を与えていることである．

14. 定　積　分

12節で積分演算は微分演算の逆演算として導入された．すなわち，関数

$f(z)$ の積分というのは，条件

$$\chi'(z) = f(z) \tag{1}$$

を満たす関数 $\chi(z)$ のことであるとされた．条件(1)を満たす関数 $\chi(z)$ は一般に $f(z)$ の**原始関数**とよばれている．この(1)はまた，$f(z)$ を既知の関数，$\chi(z)$ を未知の関数とする方程式である．

ただちに明らかになったのは，方程式(1)の解は一意的でないということであった．すなわち，$\chi(z)$ が方程式(1)を満たすならば，$\chi(z)+c$ も(1)を満たす．ただし，c は任意の定数である．

全然簡単なことではなかったが，かなり入り組んだ研究の結果，方程式(1)の解の多意性の特長が明らかにされた．すなわち，関数 $f(z)$ の変数 z の許容値の集合が連結であるならば，方程式(1)の解は定数差を無視すれば一意的であることが明らかにされた．正確にいえば次のことが証明された．関数 $h(z)$ が条件(1)を満たすならば，すなわち

$$h'(z) = f(z) \tag{2}$$

を満たすならば，この関数は次の形に書くことができる．

$$h(z) = \chi(z) + c \tag{3}$$

したがって，条件(2)を満たすすべての関数 $h(z)$ の中から1つの定まった関数を選び出すためには，定数 c に1つの値を与えれば十分である．しかし，いろいろな点で方程式(2)の解 $h(z)$ のもっと重要な選び方が存在する．これからそのことについて述べよう．

積分の限界　$f(z)$ は実変数または複素変数 z の実数または複素数の値をとる関数で，連結集合の上で与えられているとする．変数の値 z_0 を1つとり，$f(z)$ の積分 $h(z)$ ((2)，(3)参照) を条件

$$h(z_0) = 0 \tag{4}$$

を満たすようにとる．このような積分はつねに存在する．実際，そのためには定数 c の値を

$$\chi(z_0) + c = 0$$

が成り立つように定めればよい．したがって

$$c = -\chi(z_0)$$

のとき，(2)と(4)を満たす関数

$$h(z) = \chi(z) - \chi(z_0) \tag{5}$$

が得られる．この関数 $h(z)$ を関数 $f(z)$ の定積分といい，次の形の式で書き表す．

$$h(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{6}$$

この $f(z)$ の積分 $h(z)$ が $f(z)$ の**定積分**とよばれるのであるが，変数の値 z_0 を積分の**下端**といい，z を積分の**上端**という．(6)で定義される $h(z)$ は元関数 $f(z)$ と積分の2つの限界つまり下端 z_0 と上端 z に依存し，変数 ζ には依存しない．この ζ は**積分変数**とよばれ，積分変数は任意の文字で表すことができる．したがって

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$$

が成り立つ．

関数 $h(z)$ に対する条件(2)と(4)から，$h(z)$ に対して(5)が導き出された．ここで，$\chi(z)$ は $f(z)$ の任意の原始関数である．したがって，条件(2)と(4)によって $h(z)$ は一意的に定まり，原始関数によって表される式(5)は原始関数の選び方に無関係であることがわかる．

定積分の簡単な性質　$f_1(z)$ と $f_2(z)$ はそれぞれ原始関数 $\chi_1(z)$ と $\chi_2(z)$ をもつ関数で，α_1 と α_2 は定数であるとすれば，$\alpha_1\chi_1(z) + \alpha_2\chi_2(z)$ は $\alpha_1 f_1(z) + \alpha_2 f_2(z)$ の原始関数である．これから

$$\begin{aligned}
&\int_{z_0}^{z}(\alpha_1 f_1(\zeta) + \alpha_2 f_2(\zeta))d\zeta \\
&\qquad = (\alpha_1\chi_1(z) + \alpha_2\chi_2(z)) - (\alpha_1\chi_1(z_0) + \alpha_2\chi_2(z_0)) \\
&\qquad = \alpha_1(\chi_1(z) - \chi_1(z_0)) + \alpha_2(\chi_2(z) - \chi_2(z_0)) \\
&\qquad = \alpha_1\int_{z_0}^{z} f_1(\zeta)d\zeta + \alpha_2\int_{z_0}^{z} f_2(\zeta)d\zeta
\end{aligned}$$

となる．ゆえに

$$\int_{z_0}^{z}(\alpha_1 f_1(\zeta) + \alpha_2 f_2(\zeta))d\zeta = \alpha_1\int_{z_0}^{z} f_1(\zeta)d\zeta + \alpha_2\int_{z_0}^{z} f_2(\zeta)d\zeta$$

が得られる．つぎに，積分の下端と上端はある程度対等である．このことを強調するために積分の上端を z_1 で表すことにすると

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = \chi(z_1) - \chi(z_0) \tag{7}$$

となる（(5)参照）．積分の限界を交換すると

$$\int_{z_1}^{z_0} f(\zeta)d\zeta = \chi(z_0) - \chi(z_1) \tag{8}$$

が得られる．(7)と(8)からただちに

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = -\int_{z_1}^{z_0} f(\zeta)d\zeta \tag{9}$$

が得られる．最後に，z_0，z_1，z_2 を関数 $f(z)$ の変数の3つの値とすると次の式が成り立つ．

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = \chi(z_1) - \chi(z_0)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = \chi(z_2) - \chi(z_1)$$

$$\int_{z_0}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = \chi(z_2) - \chi(z_0)$$

これら3つの等式から次の重要な等式が得られる．

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = \int_{z_0}^{z_2} f(\zeta)d\zeta \tag{10}$$

定積分の一意性　いままでどおり関数 $f(z)$ は連結集合のうえで与えられたと仮定する．

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = h(z_0,\ z_1) \tag{11}$$

とおく．このとき(5)によって

$$h(z_0,\ z_1) = \chi(z_1) - \chi(z_0)$$

である．関数 $h(z_0,\ z_1)$ に対して，(2)と(4)は次の形に書き換えられる．

$$\frac{\partial h(z_0,\ z_1)}{\partial z_1} = f(z_1) \tag{12}$$

$$h(z_0,\ z_0) = 0 \tag{13}$$

(2)と(4)によって $h(z)$ は一意的に定められるから，(12)と(13)によって $h(z_0,\ z_1)$ は一意的に定められる．

(12)と(13)で z_0 と z_1 を交換すると

$$\frac{\partial h(z_1,\ z_0)}{\partial z_0} = f(z_0) \tag{14}$$

$$h(z_1,\ z_1) = 0 \tag{15}$$

が得られる．しかもこの(14)と(15)によって $h(z_1,\ z_0)$ は一意的に定められる．ここで

$$h(z_1, z_0) = -h(z_0, z_1) \tag{16}$$

であることを指摘しておく（(9)と(11)参照）．したがって，$h(z_0, z_1)$と$h(z_1, z_0)$の中の一方は他方によって一意的に定められる．(14)と(15)において，$h(z_1, z_0)$を(16)で置き換えると，$h(z_0, z_1)$に対して

$$\frac{\partial h(z_0, z_1)}{\partial z_0} = -f(z_0) \tag{17}$$

$$h(z_1, z_1) = 0 \tag{18}$$

が得られる．しかもこの(17)と(18)によって$h(z_0, z_1)$は一意的に定められる．以上のことをまとめると次のようにいうことができる．関数$h(z_0, z_1)$は(12)と(13)を満たすのと同じように(17)と(18)を満たす．しかもそれらのいずれによっても$h(z_0, z_1)$は一意的に定められる．

原始関数の存在　　これまでこの節では，関数$f(z)$の原始関数$\chi(z)$は存在するという仮定に立っていろいろ述べられてきた．しかし，条件(12)を満たす関数$h(z_0, z_1)$が存在すれば，この条件自体によって$h(z_0, z_1)$は$f(z_1)$の原始関数であるから，$f(z)$の原始関数が存在することは明らかである．全く同じように，条件(17)を満たす関数$h(z_0, z_1)$が存在すれば，$-h(z_0, z_1)$は$f(z_0)$の原始関数である．したがって$f(z)$の原始関数は存在する．まとめると次のようにいうことができる．条件(12)と(13)または条件(17)と(18)を満たす関数$h(z_0, z_1)$の存在が示されれば，定積分

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta$$

は求められる．

積分変数の変換　　積分変数の変換に関する問題の研究は不定積分の場合はすでに行われた（13節，(8)参照）．定積分の場合は積分の限界に関する補足的な考察がまず必要である．定積分

$$h(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

について考えよう．zの代わりに次の式を用いて新しい変数wを導入する．

$$z = \psi(w)$$

ただし，$\psi(w)$は逆関数$\varphi(z)$をもつとする．そうするとこの式は

$$w = \varphi(z)$$

と同値である．

したがって恒等式

$$\varphi(\psi(w)) = w, \quad \psi(\varphi(z)) = z \tag{19}$$

が成り立つ．さてここで明らかにしたいのは，関数

$$h^*(w) = h(\psi(w))$$

をどのようなやり方で定積分の形に書き表すことができるかということである．そうすると，このことは次のやり方でできることがわかる．

$$h^*(w) = \int_{w_0}^{w} g(w)dw \tag{20}$$

ただし，

$$\begin{aligned} g(w) &= f(\psi(w))\psi'(w) \\ w_0 &= \varphi(z_0), \quad w = \varphi(z) \end{aligned} \tag{21}$$

証明のため，関数 $h^*(w)$ は条件(*12*)と(*13*)を満たすことを示そう．実際，合成関数の微分法の公式（11 節，(*21*)参照）によって

$$\begin{aligned} (h^*(w))' &= (h(\psi(w)))' = h'(\psi(w))\cdot\psi'(w) \\ &= f(\psi(w))\cdot\psi'(w) = g(w) \end{aligned}$$

となる（(*21*)参照）．したがって，$h^*(w)$ は条件(*12*)を満たす．さらに，

$$h^*(w_0) = h(\psi(w_0)) = h(z_0) = 0$$

となる．したがって，条件(*13*)も満たされる．これで $h^*(w)$ は条件(*12*)と(*13*)を満たすことが示された．ゆえに，$h^*(w)$ は定積分(*20*)である．

パラメータに関する依存性　被積分関数が積分変数 z だけでなくもう 1 つパラメータとよばれている変数 u にも依存しているとき，すなわち $f(z, u)$ の形の関数であるとき，この関数の原始関数もまたパラメータ u に依存する．すなわち原始関数も $\chi(z, u)$ の形の関数になる．この $\chi(z, u)$ は方程式

$$\frac{\partial}{\partial z}\chi(z, u) = f(z, u)$$

を満たす．方程式

$$\frac{\partial}{\partial z}h(z, u) = f(z, u) \tag{22}$$

を満たすすべての $h(z, u)$ に対して $\chi(z, u)$ との差は z に関係しない定数である．しかしいまの場合，定数はもちろんパラメータ u に関係する．したがって，$h(z, u)$ は次のように書き表すことができる．

$$h(z, u) = \chi(z, u) + c(u)$$

ただし，$c(u)$ はパラメータ u の任意の関数である．さて，変数 z の値 z_0 を1つとり，関数 $h(z,\ u)$ は条件

$$h(z_0,\ u) = 0 \tag{23}$$

を満たさなければならないとする．この(23)が成り立つようにするためには，パラメータ u の関数 $c(u)$ を次の等式が成り立つように選べばよい．

$$\chi(z_0,\ u) + c(u) = 0$$

これから

$$c(u) = -\chi(z_0,\ u)$$

となる．したがって(23)を満たす $h(z,\ u)$ に対して

$$h(z,\ u) = \chi(z,\ u) - \chi(z_0,\ u) \tag{24}$$

が得られる．条件(22)と(23)を満たす関数 $h(z,\ u)$ は関数 $f(z,\ u)$ の定積分で，次のように書き表される．

$$h(z,\ u) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta,\ u)d\zeta \tag{25}$$

したがって，定積分(25)は(24)の形の式で書き表せる．さて，積分の下端と上端の対等性を強調するために，積分の上端 z を z_1 と書くことにしよう．このとき次のように書き表すことができる．

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta,\ u)d\zeta = h(z_0,\ z_1,\ u) = \chi(z_1,\ u) - \chi(z_0,\ u) \tag{26}$$

この式では，定積分(26)は積分の下端と上端とパラメータ u に依存することが強調されている．ところで，定積分 $h(z_0,\ z_1,\ u)$ は積分の上端の関数として次の2つの条件を満たす．

$$\frac{\partial}{\partial z_1} h(z_0,\ z_1,\ u) = f(z_1,\ u) \tag{27}$$

$$h(z_0,\ z_0,\ u) = 0 \tag{28}$$

しかも，$h(z_0,\ z_1,\ u)$ はこれらの条件によって一意的に定まる．また，定積分 $h(z_0,\ z_1,\ u)$ は積分の下端 z_0 の関数として次の2つの条件を満たす．

$$\frac{\partial}{\partial z_0} h(z_0,\ z_1,\ u) = -f(z_0,\ u) \tag{29}$$

$$h(z_1,\ z_1,\ u) = 0 \tag{30}$$

しかも，$h(z_0,\ z_1,\ u)$ はこれらの条件によって一意的に定まる．したがって，3変数の関数 $h(z_0,\ z_1,\ u)$ が積分

$$h(z_0,\ z_1,\ u)=\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta,\ u)d\zeta$$

であることを確かめるためには，$h(z_0,\ z_1,\ u)$ が条件(27)と(28)または条件(29)と(30)を満たすことを確かめなければならない．したがっていま述べた定積分を求める方法は条件の点検の方法である．単に $h(z_0,\ z_1,\ u)$ が条件(27)と(28)または条件(29)と(30)を満たす関数であるかどうかを見分けることが必要なだけだからである．

さて，パラメータ u に依存する関数の積分法についてこれまで述べてきたことはあまり興味のもてるものではない．自明でもなくしかもとくに注目する必要があるのは，パラメータ u が積分の限界の1つと一致する場合，つまり2つの積分限界の中の1つに対して

$$u=z_0 \quad \text{または} \quad u=z_1$$

となる場合である．すなわち，次の2つの積分の中の1つを求める場合である．

$$h(z_0,\ z_1,\ z_1)=\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta,\ z_1)d\zeta \tag{31}$$

$$h(z_0,\ z_1,\ z_0)=\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta,\ z_0)d\zeta \tag{32}$$

積分(31)を求めようとするとき，条件(27)と(28)を用いる点検の方法は役に立たないが，その代わり条件(29)と(30)を用いる点検の方法は使える．一方，積分(32)を求めようとするとき，条件(29)と(30)を用いる点検の方法は役に立たないが，条件(27)と(28)を用いる点検の方法は役に立つ．なぜそのようになるのか説明しよう．1番目の積分(31)を考えてみよう．関数 $h(z_0,\ z_1,\ u)$ において u を z_1 で置き換えると，$h(z_0,\ z_1,\ z_1)$ は変数 z_1 の関数としての積分(31)になるのであるから，

$$\frac{\partial}{\partial z_1}h(z_0,\ z_1,\ z_1)=f(z_0,\ z_1) \tag{33}$$

は満たされない．実際，条件(27)を導入するとき，3番目の変数のパラメータ u は定数と見なしたのであった．ところが，(33)の左辺で z_1 について微分するとき，3番目の変数は z_1 という変数になっていると考えているからである．したがって，いまの場合2変数の関数 $h(z_0,\ z_1,\ z_1)$ が定積分(31)であることを確かめるためには，条件(29)と(30)を適用しなければならない．すなわち

$$\frac{\partial}{\partial z_0}h(z_0,\ z_1,\ z_1) = -f(z_0,\ z_1) \tag{34}$$

$$h(z_1,\ z_1,\ z_1) = 0 \tag{35}$$

を確かめることが必要である．全く同じことが定積分(*32*)を求める場合にもいえる．この場合は

$$\frac{\partial}{\partial z_1}h(z_0,\ z_1,\ z_0) = f(z_1,\ z_0)$$

$$h(z_0,\ z_0,\ z_0) = 0$$

を確かめることが必要である．

不等式の積分法　ここでは，実変数の実数値関数だけを考察する．次の命題を証明しよう．2つの関数 $f_1(x,\ u)$ と $f_2(x,\ u)$ に対して，不等式

$$f_1(x,\ u) \leqq f_2(x,\ u) \tag{36}$$

が変数 x と u のすべての許容値について成り立つならば，不等式

$$\mathrm{sign}(x - x_0)\int_{x_0}^{x} f_1(\xi,\ u)d\xi \leqq \mathrm{sign}(x - x_0)\int_{x_0}^{x} f_2(\xi,\ u)d\xi \tag{37}$$

が成り立つ．すなわち，不等式(*36*)は x_0 から x_1 まで積分することができる．

この命題を証明するために，関数

$$f(x,\ u) = f_2(x,\ u) - f_1(x,\ u)$$

をつくる．明らかに，(*36*)から(*37*)が得られることを証明するためには，不等式

$$f(x,\ u) \geqq 0 \tag{38}$$

から不等式

$$\mathrm{sign}(x - x_0)\int_{x_0}^{x} f(\xi,\ u)d\xi \geqq 0 \tag{39}$$

が得られることを証明すればよい．関数 $f(x,\ u)$ のこの性質の証明をしよう．そのためにまず

$$h(x,\ u) = \int_{x_0}^{x} f(\xi,\ u)d\xi$$

とおく．(*23*)から

$$h(x,\ u) = h(x,\ u) - h(x_0,\ u) \tag{40}$$

が得られる．さらに，ラグランジュの公式（12節，(*20*)参照）によって次の等式が成り立つ．

$$h(x,\ u) - h(x_0,\ u) = \frac{\partial}{\partial x}h(\eta,\ u)(x - x_0) = f(\eta,\ u)(x - x_0) \tag{41}$$

ただし，η は x_0 と x の間の 1 つの数である．(*38*)によって $f(x,\ u) \geqq 0$ であるから，(*40*)と(*41*)から

$$\mathrm{sign}(x - x_0)\cdot h(x,\ u) \geqq 0$$

すなわち(*39*)が得られる．

なお，次のことを指摘しておこう．ここで証明された不等式はとくに $u = x_0$ のときにも成り立つ．なぜなら証明の際に定積分を与える条件(*27*)と(*28*)を用いればよいからである．また，条件(*29*)と(*30*)を用いると，不等式(*37*)は $u = x$ のときも成り立つことが証明できる．

関数の絶対値の積分法　ここでもまた実変数の実数値関数を考察する．次の命題を証明しよう．区間 $[x_0 x]$ のすべての ξ に対して

$$|f(\xi,\ u)| \leqq M \tag{42}$$

が成り立つならば，不等式

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(\xi,\ u)d\xi \right| \leqq M\cdot|x - x_0| \tag{43}$$

が成り立つ．これを証明する．(*42*)から

$$-M \leqq f(\xi,\ u) \leqq M$$

が得られる．この二重不等式を x_0 から x まで積分すると二重不等式

$$\begin{aligned}\mathrm{sign}(x - x_0)\cdot(-M)\cdot(x - x_0) &\leqq \mathrm{sign}(x - x_0)\int_{x_0}^{x} f(\xi,\ u)d\xi \\ &\leqq \mathrm{sign}(x - x_0)\cdot M\cdot(x - x_0)\end{aligned} \tag{44}$$

が得られる．これからただちに不等式(*43*)が成り立つことがわかる．

15．テイラー級数

与えられた変数の値における関数の値を計算する最も重要な方法の 1 つはべき級数展開に基づくものである．ときには関数自体がべき級数で定義される．たとえば指数関数 $\exp(z)$ は級数で定義された関数である（7 節参照）．またときには，何らかの方法で与えられた関数をべき級数に展開し，それが関数値

を計算する方法として成功することがある．前に述べたようにこのような例として実変数 x の関数 $\cos x$ と $\sin x$ があげられる．これらの関数は最初幾何学的に定義され，つぎに 8 節で $\exp(z)$ の性質を用いてべき級数に展開された．また，関数のべき級数展開を用いて関数の性質を研究することができる．たとえば 7 節で $\exp(z)$ についてこのような研究が行われた．7 節のはじめのところで $\exp(z)$ のいろいろな性質が確かめられた．それからべき級数を用いて変数の実数値に対して与えられた関数を複素変数の領域にまで拡大することも行われた．またすでに多くの超越関数のべき級数展開が求められた．さて今度は，与えられた関数のべき級数展開可能性の問題を提起する番である．この節でこの問題を研究することにしよう．しかもまず独立変数 z のべき級数展開の場合についてというのではなく，ただちに $z-z_0$ のべき級数展開について考察する．ただし，z_0 は変数の定められた 1 つの値である．またこのとき実数領域の場合も複素数領域の場合も同時に考察する．したがって，対象とする関数の値も変数 z と同じように複素数でもありまた実数でもある．

最初に，関数 $f(z)$ は $z-z_0$ のべき級数に展開されるものと仮定しよう．すなわち，

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots \tag{1}$$

が成り立つとする．この級数は明らかに $z=z_0$ のとき収束する．しかしこの級数の考察が何らかの意味をもつためには，級数が $z=z_0$ だけではなくほかの値に対しても収束すると見なさなければならない．そうすると級数(1)の収束半径は正であることがわかる．すなわち，(1)は不等式

$$|z-z_0| < r, \quad r > 0$$

を満たすすべての z に対して絶対収束する．さて，級数(1)の係数は関数 $f(z)$ の微分係数を用いて容易に計算することができる．しかしこのためには，$f(z)$ の 1 次微分係数だけでなく高次微分係数が必要である．この高次微分係数はこれまで正式にきちんと定義されていなかった．それだからここで高次微分係数の定義を述べることにしよう．

高次微分係数　すでに，関数 $f(z)$ の微分係数 $f'(z)$ とは何であるかということは知っている．$f'(z)$ を **1 次微分係数**とよぼう．導関数 $f'(z)$ の微分係数 $(f'(z))'$ を $f(z)$ の **2 次微分係数**といい，$f''(z)$ で表す．全く同じように，微

分係数 $(f''(z))'$ を $f(z)$ の3次微分係数といい，$f'''(z)$ または $f^{(3)}(z)$ で表す．任意次数 n の微分係数，つまり n 次微分係数 $f^{(n)}(z)$ は式

$$f^{(n)}(z)=(f^{(n-1)}(z))' \tag{2}$$

を用いて帰納的に定義される．

さてすでに知っているように，正の半径 r の円においてべき級数が収束するならば，微分係数は級数を項別微分することによって得られ，しかも項別微分級数は同じ半径 r の円において収束する．このことは z のべき級数に展開される関数に対して証明された（11節参照）．関数 $f(z)$ は $z-z_0$ のべき級数に展開されるので（(1)参照），(1)は変数 $z-z_0$ について微分することができ，しかも項別微分級数の収束半径は変わらない．ところが，$z-z_0$ について微分することと z について微分することは11節の(22)によって同値である．なぜなら，$\dfrac{d(z-z_0)}{dz}=1$ だからである．等式(1)の両辺の n 次微分係数を求めると次のようになる．

$$\begin{aligned}f^{(n)}(z)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}(z-z_0)+\cdots\\+(n+k)(n+k-1)\cdots(k+1)a_{n+k}(z-z_0)^k+\cdots\end{aligned}$$

しかもこの等式は $|z-z_0|<r$ を満たすすべての z に対して成り立つ．ここで $z=z_0$ とおくと $f^{(n)}(z_0)=n!a_n$ が得られる．これから

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{3}$$

となる．

したがって，級数(1)の係数 a_n は関数 $f(z)$ の n 次微分係数によって表された．また，等式(1)は次のような新しい形で書き表すことができる．

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots \tag{4}$$

この等式(4)の右辺の級数を関数 $f(z)$ の点 $z=z_0$ における**テイラー級数**という．ところで，この展開が可能なのは関数 $f(z)$ が点 z_0 ですべての次数の高次微分係数をもつという条件が満たされているときだけである．等式(3)を証明するとき，$f(z)$ は $z-z_0$ のべき級数に展開され，そのべき級数の収束半径は正であるという仮定から出発したことをここで注意しておく．

さてつぎに起こってくる問題は，どのような関数 $f(z)$ がテイラー級数(4)に展開できるか，ということである．この問題を解決するためにまず次のように $f(z)$ と級数(4)の部分和との差 R_n をつくらなければならないのは明らかである．

$$R_n = R_n(z_0,\ z)$$
$$= f(z) - \left(f(z_0) + \frac{1}{1!}f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n\right) \tag{5}$$

明らかに

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z_0,\ z) = 0 \tag{6}$$

が成り立つならば，$f(z)$ はテイラー級数(4)に展開できる．また，(6)が成り立たないならば，$f(z)$ はテイラー級数(4)に展開できない．

さてこれから述べることからわかるように，$R_n(z_0,\ z)$ は比較的簡単な関数の定積分として書き表すことができる．この書き表し方を用いると，(6)が成り立つかどうかという問題を解くことが可能になる．$R_n(z_0,\ z)$ を定積分で書き表すために，14 節の条件(34)と(35)を使うことにしよう．ただし，

$$R_n(z_0,\ z) = h(z_0,\ z,\ z)$$

とする．まず 14 節の条件(34)を点検するために，微分係数

$$\frac{\partial}{\partial z_0}R_n(z_0,\ z) \tag{7}$$

を計算し，そのうえ(34)の右辺の関数 $f(z_0,\ z)$ を求めなければならない．つぎにさらに，条件(35)を点検しなければならない．

微分係数(7)の計算をしよう．その際，z_0 を変数と見なし，z は定数と見なす．そうすると

$$\frac{\partial}{\partial z_0}f(z) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z_0}f(z_0) = f'(z_0) \tag{8}$$

である．$k > 0$ のとき

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$
$$= -\frac{1}{(k-1)!}f^{(k)}(z_0)(z-z_0)^{k-1} + \frac{1}{k!}f^{(k+1)}(z_0)(z-z_0)^k \tag{9}$$

となる．等式(9)を k について1から n まで加え，(8)を考慮すると

$$\frac{\partial}{\partial z_0}R_n(z_0,\ z) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(z_0)(z-z_0)^n$$

が得られる．したがって，いまの場合14節の等式(34)の右辺の関数 $f(z_0,\ z)$ は次の式で与えられる．

$$f(z_0,\ z) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(z_0)(z-z_0)^n$$

14節の(35)を点検するためには，等式(5)において z_0 を z で置き換えなければならない．このとき明らかに

$$R_n(z,\ z) = 0$$

が得られる．ゆえに，14節の結果によって $R_n(z_0,\ z)$ を次の形の定積分で書き表すことができる．

$$R_n = R_n(z_0,\ z) = \frac{1}{n!}\int_{z_0}^{z} f^{(n+1)}(\zeta)(z-\zeta)^n d\zeta \tag{10}$$

また，(5)と(10)からただちに次の等式が得られる．

$$f(z) = f(z_0) + \frac{1}{1!}f'(z_0)(z-z_0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{z_0}^{z} f^{(n+1)}(\zeta)(z-\zeta)^n d\zeta \tag{11}$$

式(10)はテイラーの公式の**剰余項**とよばれている．テイラーの公式(11)は関数 $f(z)$ が $n+1$ 次までの高次微分係数をもっているときに成り立つ．それだからこの公式(11)が重要なのはテイラー級数展開のためだけではないといえよう．一方，極限の式(6)が意味をもつために必要なのは，$f(z)$ がすべての次数の高次微分係数をもつことである．したがって，$f(z)$ がテイラー級数に展開できるために必要なのは，$f(z)$ がすべての次数の高次微分係数をもち，しかも級数(4)が収束することである．しかし，この条件は十分ではない．例2において，すべての次数の高次微分係数をもち，級数(4)は $z_0=0$ としたとき収束するが，$z_0=0$ においてテイラー級数に展開できない関数をつくる．

さて，いま得られた結果を用いて，実変数 x の実関数

$$f(x) = (1+x)^r \tag{12}$$

をテイラー級数に展開してみよう．ただし，r は任意の実数である（11節，(30)，(31)参照）．この展開は次のとおりである．

$$(1+x)^r = 1 + \frac{r}{1!}x + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad (13)$$

ここで，r が自然数のとき，この式はニュートンの2項定理の公式と一致する．それで r が実数の場合にもこの公式をニュートンの2項定理とよぶのは自然なことである．しかもこの(*13*)はニュートン自身すでに知っていたのであるからなおさらである．さて，展開(*13*)は $|x|<1$ に対して成り立つことを証明しよう．この証明のため，まずはじめに，11節の(*31*)を用いて関数 $(1+x)^r$ のすべての n 次微分係数を計算する．その結果は

$$f^{(n)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n}$$

となる．つぎに，いまの場合の剰余項は $|x|<1$ に対して0に収束することを証明する．そのため

$$\mu = \frac{x-\xi}{1+\xi} \qquad (14)$$

を評価しよう．ただし，ξ は区間 $[0x]$ の値をとる実変数である．このとき，

$$|\mu| \leqq |x| \qquad (15)$$

が成り立つことを証明する．x が正ならば，ξ も正で，(*14*)から(*15*)が成り立つことはただちにわかる．x が負ならば，ξ も負で，このときは

$$\mu = x \cdot \frac{1-\dfrac{\xi}{x}}{1+\xi}$$

から(*15*)が得られる．ところで関数(*12*)に対して剰余項 R_n は次の式で与えられる．

$$R_n = A_n\int_0^x (1+\xi)^{r-n-1}(x-\xi)^n d\xi = A_n\int_0^x \mu^n(1+\xi)^{r-1}d\xi$$

ただし，

$$A_n = \frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{n!}$$

$|x|<1$ で，ξ は0から x までの範囲で変わるのであるから，$(1+\xi)^{r-1}$ はある定数 δ を越えない．したがって，積分の評価（14節，(*43*)参照）を用いて $|R_n| \leqq A_n\delta|x|^{n+1}$ が得られる．また，A_n は次のように積の形に書き表せる．

$$A_n = r \cdot \frac{r-1}{1} \cdot \frac{r-2}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{r-n}{n}$$

したがって，因数 r を除くと A_n は $\dfrac{r-k}{k} = \dfrac{r}{k} - 1$ の形の数の積である．明らかに

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{r}{k} - 1\right) = -1 \tag{16}$$

ここで，正の数 s を

$$|x| < s < 1$$

となるように選ぶと，(*16*)からわかるように，ある大きな自然数 l が存在して，

$$k > l \quad \text{のとき} \quad \left|\frac{r-k}{k}x\right| < s$$

が成り立つ．以上から

$$|R_n| \leqq \frac{r(r-1)\cdots(r-l)}{l!} \cdot \delta \cdot s^{n-l} \cdot |x|^{l+1}$$

が得られる．$s < 1$ であるから，$n \to \infty$ のとき $s^{n-1} \to 0$．これで(*16*)の $f(x)$ に対して(*6*)が成り立つことが証明された．ゆえに，等式(*13*)は $|x| < 1$ に対して成り立つ．

例1　今度は実変数の実数値関数に対するテイラーの公式の剰余項 R_n を広く受け入れられている簡単な形で書き表してみよう．このため関数 $f^{(n+1)}(\xi)$ は x_0 から x までの区間上で連続であると仮定し，その区間におけるこの関数の最小値を p，最大値を q とする．したがって不等式

$$p \leqq f^{(n+1)}(\xi) \leqq q \tag{17}$$

が成り立つ．このとき，次の等式が成り立つことを示そう．

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\gamma \tag{18}$$

ただし，γ は p と q の間の数である．さらにこの γ は次のように書き表すことができる［例3参照］．

$$\gamma = f^{(n+1)}(\eta)$$

ただし，η は x_0 と x の間の数である．したがって，いまは常識になっている次の形の剰余項が得られる．

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \tag{19}$$

この(*19*)を証明しよう．そのために

$$\int_{x_0}^{x} (x-\xi)^n d\xi = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

を利用する．

$(x-\xi)$ と $(x-x_0)$ の符号は同じであるから，二重不等式(*17*)に $(x-\xi)^n$ $\mathrm{sign}(x-x_0)^n$ を掛けると

$$\begin{aligned}(x-\xi)^n p\,\mathrm{sign}(x-x_0)^n &\leqq (x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\mathrm{sign}(x-x_0)^n \\ &\leqq (x-\xi)^x q\,\mathrm{sign}(x-x_0)^n\end{aligned}$$

となる．この二重不等式を x_0 から x まで積分すると（14 節，(*44*)参照）

$$\begin{aligned}&\frac{p}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\mathrm{sign}(x-x_0)^{n+1} \\ &\qquad \leqq \mathrm{sign}(x-x_0)^{n+1}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)d\xi \\ &\qquad \leqq \frac{q}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\mathrm{sign}(x-x_0)^{n+1}\end{aligned}$$

が得られる．さらにこの二重不等式を $n!$ で割ると

$$\begin{aligned}&\frac{p}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\mathrm{sign}(x-x_0)^{n+1} \\ &\qquad \leqq R_n\,\mathrm{sign}(x-x_0)^{n+1} \leqq \frac{q}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\mathrm{sign}(x-x_0)^{n+1}\end{aligned}$$

が得られる．これからただちに(*18*)が導かれる．また，(*19*)の形の剰余項を用いると，e^x，$\sin x$，$\cos x$ のテイラー級数展開が容易に得られる．しかし，$(1+x)^r$ の展開は（(*13*)参照）(*19*)を用いては得られない．

例 2　ここでテイラー級数に展開できない関数の例をあげよう．このためまず最初に任意の自然数 n に対して，ξ が無限大になるとき，e^ξ は ξ^n よりも速く増大することに注意しよう．実際

$$\frac{e^\xi}{\xi^n} = \frac{1+\dfrac{\xi}{1!}+\dfrac{\xi^2}{2!}+\cdots+\dfrac{\xi^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots}{\xi^n} > \frac{\xi}{(n+1)!}$$

であるから，これからただちに

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{e^\xi}{\xi^n} = \infty$$

が得られる．逆数をとって極限に移行すると，$\xi \to \infty$ のとき，$e^{-\xi}$ は $\dfrac{1}{\xi^n}$ よりも速く 0 に収束することがわかる．$\xi = \dfrac{1}{x^2}$ とおき，$x \to 0$ とするとき，いま述べたことから，$\dfrac{1}{x}$ の多項式 $P\left(\dfrac{1}{x}\right)$ に対して

$$\lim_{x \to 0} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \tag{20}$$

となることが導かれる．関数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $x \neq 0$ なるすべての x に対して定義されている．$x = 0$ のときは定義されていないが，$f(0) = 0$ と見なしても不自然ではない．なぜなら $f(0) = 0$ とすると $f(x)$ は 0 で連続になるからである．$x \neq 0$ に対して 11 節の微分法の規則を用いて $f(x)$ の微分係数を計算するのは容易である．その結果は

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

である．(*20*) によって

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

となる．しかしこれから $f^{(n)}(0) = 0$ は得られない．$f^{(n)}(0) = 0$ を帰納法で証明しよう．$f^{(n-1)}(0) = 0$ と仮定して $f^{(n)}(0) = 0$ を証明する．実際，

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

となる（(*20*) 参照）．したがって $f(x)$ の $x = 0$ におけるすべての次数の高次微分係数は 0 である．もしこの $f(x)$ が $x = 0$ においてテイラー級数に展開できるとすれば，$f(x) \equiv 0$が得られる．しかし，これは明らかに正しくない．ゆえに，この関数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ は $x = 0$ においてテイラー級数に展開できない．

例 3　　連結集合上で与えられた実変数 x の実数値連続関数 $f(x)$ について考える．この関数は 2 つの値 y_0 と y_2 をとると仮定しよう．すなわち

$$y_0 = f(x_0), \quad y_2 = f(x_2) \tag{21}$$

を満たす変数 x の 2 つの値 x_0 と x_2 が存在するとしよう．このとき，y_0 と y_2 の間の任意の実数 y_1 に対して，x_1 と x_2 の間に $y_1 = f(x_1)$ を満たす x_1 が存在

する．要するに，実数値連続関数は関数の任意の 2 つの値に対してその間のすべての値をとるというのである．

この命題を証明するために便宜上，$x_0 < x_2$，$y_0 < y_2$ と仮定する．また，y_1 は y_0 とも y_2 とも等しくないとしてよい．なぜなら y_1 が y_0 または y_2 のどちらかに等しいとすれば，明らかに y_1 は $f(x)$ の値である（(*21*)参照)．さて，不等式

$$f(x) \leqq y_1$$

を満たす区間 $[x_0x_2]$ の点を全部集めよう．このような区間 $[x_0x_2]$ の点全体の集合を M とする．この集合は空集合でない．なぜならこの集合は x_0 を含むからである．実際

$$f(x_0) = y_0 < y_1$$

である．そこで集合 M の上限を x_1 とする（4 節参照)．このとき

$$f(x_1) = y_1 \tag{22}$$

となることを証明しよう．

等式(*22*)の証明は背理法によって行う．(*22*)は正しくないと仮定する．すなわち

$$\varepsilon = |f(x_1) - y_1| > 0$$

とする．$f(x)$ は連続であるから，この ε に対して適当な正の数 δ が存在して

$$|x - x_1| < \delta \tag{23}$$

ならば不等式

$$|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$$

が成り立つ．不等式(*23*)を満たす区間 $[x_0x_2]$ の点全体の集合を U とする．明らかに，$f(x_1) < y_1$ ならば U のすべての点は M に属する．逆に，$f(x_1) > y_1$ ならば U のどの点も M に属さない．前者の場合，U の x_1 より大きい点はすべて M に属するから，x_1 は M の上限でない．後者の場合，U の x_1 より小さい点はどれも M に属さないし，x_1 自身も M に属さない．したがって x_1 は M の上限ではない．これは矛盾である．ゆえに，等式(*22*)は成り立つ．

例 4　　明らかに，級数(*13*)は実数 x を複素数 z で置き換えても収束し，しかも収束半径は 1 より小さくはない．実際，r が自然数でない場合は収束半径は 1 である．したがって，z が複素数で $|z| < 1$ のとき関数 $(1 + z)^r$ を次の級数で定義することができる．

$$(1+z)^r = 1 + \frac{r}{1!}z + \frac{r(r-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}z^n + \cdots \tag{24}$$

ここでこの展開(*24*)を利用して arcsin z のテイラー級数展開を求めてみよう．11節の公式(*28*)によって

$$(\arcsin z)' = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

である．(*24*)から

$$(\arcsin z)' = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}z^{2n} + \cdots \tag{25}$$

となる．$z=0$ のとき 0 になる arcsin z の分枝をとると，(*25*)を項別積分することによって

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}z^3 + \cdots + \frac{1}{2^n}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}z^{2n+1} + \cdots \tag{26}$$

が得られる．このようにして，arcsin z のテイラー級数展開(*26*)が得られた．

3 章
積　　　分　　　法

積分法についての記述は実変数 x の実数値関数 $f(x)$ の定積分を $f(x)$ のグラフと 2 つの垂線と横軸で囲まれた図形の面積として表すことから始める．その際この面積というものが存在することを事実として受け入れておくことにする．またこのような面積としての定積分は $f(x)$ の原始関数であることが証明される．このようにして，直観的には明白なことと見なされている面積の存在をもとにして，原始関数の存在が証明される．さらに，定積分を積分和の列の極限として表す．そこではこの極限の存在の証明が数学的に完全な形で与えられる．この章の終りのところで定積分の応用について述べる．関数のグラフとして与えられる曲線の長さ，パラメータで与えられる曲線の長さの計算が行われる．

16．面積としての定積分

14 節で関数 $f(z)$ の定積分について述べられた．すなわち関数 $h(z)$ が $f(z)$ の定積分であるといわれて，

$$h(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

の形で書き表されるのは，$h(z)$ が 2 つの条件

$$h'(z) = f(z), \quad h(z_0) = 0$$

を満たすことである．しかし，この定積分の定義には，積分の求め方について何も示されていないという欠点がある．単に $f(z)$ の原始関数 $\varkappa(z)$，つまり $\varkappa'(z) = f(z)$ を満たす関数 $\varkappa(z)$ を見つけ出すことが必要とされているにすぎ

ない．むろんこの原始関数を見つけ出す方法は全然駄目であるというわけではない．いろいろの場合に，この方法を用いて多項式やべき級数や初等的な超越関数の積分を求めることができた（13節参照）．しかし，この定義は全く非構成的である．積分を構成するための方法は全然与えられていない．ところで，実変数の実数値連続関数に対する定積分の書き表し方として，面積の計算に関連したやり方が歴史的にはかなり古くから存在している．ここではこの方法について述べることにしよう．

さて，定積分は一部分は線分で一部分は曲線で囲まれた図形の面積として表現できる．平面図形の面積とは何かということが直観的に理解されているとすれば，これはわかりやすい幾何学的な表現である．またこのとき何らかの具体的な面積の近似計算法が得られるならば，それは定積分の近似計算法になる．これについては後で述べる（18節参照）．ここでは面積についての全く直観的な理解だけに基づいて，定積分と面積の関係を確立することにしよう．

グラフ図形の面積　実変数 ξ の実数値連続関数 $f(\xi)$ について考える．まず最初にこの関数のグラフ C を描こう．そのために平面 P 上に水平に横軸をとり垂直に縦軸をとる（図11）．横軸に沿って ξ をおき，縦軸に沿って

$$y = f(\xi)$$

をおく．横軸上の座標が ξ に等しい点を同じ ξ で表す．さて，変数 ξ の2つの値を全く任意にとり，それらをそれぞれ x_0 および x とする．点 x_0 と x を通る垂線を引き，それらが曲線 C と交わる点をそれぞれ a_0 および a とする．グラフ C の一部分 a_0a が横軸の一方の側にあるならば，全く自然な方法で平面上に縦の線分 $[x_0a_0]$ および $[xa]$ と横軸の線分 $[x_0x]$ と C の一部分 $[a_0a]$ に

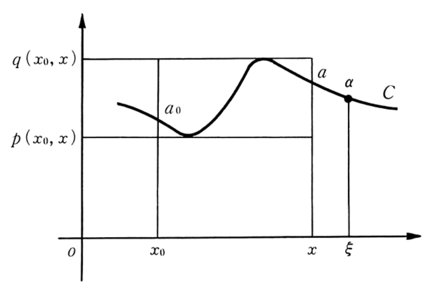


図11

よって囲まれる図形がつくれる．平面上のこの図形は1つの側面が曲線によって限られているにもかかわらず面積をもつと見なすのは全く自然なことである．面積の値はその本性によって正であるか，あるいは極端な場合，たとえば $x_0 = x$ の場合でもたかだか0である．さて，曲線四辺形 x_0xaa_0 の面積に符号をつけて面積を代数化しよう．すなわち，$x_0 < x$ のとき曲線 a_0a が横軸の上側にあるならば，面積は正とし，曲線 a_0a が横軸の下側にあるならば，面積は負とする．$x_0 > x$ のときは，いまの場合とちょうど逆に面積の符号を定める．このように代数化された曲線四辺形 x_0xaa_0 の面積を $h(x_0,\ x)$ で表す．

つぎに，面積 $h(x_0,\ x)$ と2つの自然な形でできてくる長方形の面積を比較しよう．このため，$p(x_0,\ x)$ で関数 $f(\xi)$ の区間 $[x_0x]$ における最小値を表し，$q(x_0,\ x)$ で関数 $f(\xi)$ の区間 $[x_0x]$ における最大値を表すことにしよう．今度は区間 $[x_0x]$ を底辺とし高さ $p(x_0,\ x)$ の第1長方形と同じ区間 $[x_0x]$ を底辺とし高さ $q(x_0,\ x)$ の第2長方形の2つの長方形をつくる．その際，$p(x_0,\ x)$ と $q(x_0,\ x)$ の符号を考慮し，高さが正ならば横軸の上側に長方形をつくり，高さが負ならば横軸の下側に長方形をつくる．さて，曲線 a_0a が横軸の上方を通るならば，曲線四辺形 x_0xaa_0 は第1長方形を含み，第2長方形に含まれる．このことから，$x_0 < x$ のとき，二重不等式

$$(x - x_0)p(x_0,\ x) \leqq h(x_0,\ x) \leqq (x - x_0)q(x_0,\ x)$$

が得られる．$x_0 > x$ のとき，この二重不等式は成り立たない．正しい二重不等式を得るためには，不等式の中の各式の符号を逆転しなければならない．$x_0 < x$ と $x_0 > x$ の両方の場合を1つの式にまとめるためには，t が正のとき1に等しく，t が負のとき -1 に等しい関数 $\operatorname{sign} t$ を利用する．そうすると，上の不等式は $x_0 < x$ と $x_0 > x$ の両方の場合に成り立つように1つにまとめて次の形の不等式で書き表される．

$$\begin{aligned}(x - x_0)p(x_0,\ x)\operatorname{sign}(x - x_0) &\leqq h(x_0,\ x)\operatorname{sigh}(x - x_0)\\ &\leqq (x - x_0)q(x_0,\ x)\operatorname{sign}(x - x_0) \qquad (1)\end{aligned}$$

この不等式は曲線 a_0a が横軸の上側にある場合に得られたのであるが，曲線 a_0a が横軸の下側にある場合にも同じ不等式が成り立つ．このことは容易に確かめられる．

これまで曲線 a_0a は横軸の一方の側にあると仮定してきた．今度は曲線 a_0a が横軸といくつかの点で，場合によっては無限個の点で交わる場合について考

察しよう．この場合曲線四辺形 x_0xaa_0 は存在しない．なぜなら曲線 a_0a の一部分は横軸の上側に一部分は下側にあるからである．そこで，曲線 a_0a の上の部分と横軸の間にできる図形の面積全部の和から，曲線 a_0a の下の部分と横軸の間にできる図形全部の和を引く．このようにして得られた数値に $\mathrm{sign}(x-x_0)$ を掛けた数値を $h(x_0,\ x)$ で表す．そうすると容易に確かめられるように，$h(x_0,\ x)$ は二重不等式(1)を満たす．さて記号を強調するため以下では，x_0 を定数，x を変数と見なして

$$h(x)=h(x_0,\ x)$$

とおく．このとき明らかに

$$h(x_0)=h(x_0,\ x_0)=0 \tag{2}$$

である．さらにいまから

$$h'(x)=f(x) \tag{3}$$

が成り立つことを証明しよう．そうすると(2)と(3)から

$$h(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

が得られる（14節，(2)と(4)参照)．したがって，定積分の幾何学的な意味が明らかになる．そこでこのあとしなければならない仕事は(3)の証明だけである．この(3)の証明を行うことにしよう．

等式(3)の証明は，曲線 a_0a が横軸の上側を通る場合について考えながら進めていくとよい．それは上に述べた不等式は曲線の行動が最も一般な場合にも成り立つからである．もちろんそれぞれの場合ごとにきちんと点検しなければならないことではある．さて，$h(x)$ の微分係数を計算するために，いつものように ξ を x の近くに x と等しくならないようにとる．ξ を通る垂線とグラフ C との交点を α で表し

$$h(\xi)-h(x)=h(x_0,\ \xi)-h(x_0,\ x)$$

をつくる．幾何学的に見れば明らかなように

$$h(x_0,\ \xi)-h(x_0,\ x)=h(x,\ \xi) \tag{5}$$

である．実際これは2つの曲線四辺形 $x_0\xi\alpha a_0$ と x_0xaa_0 を幾何学的に考察することから得られる（図11参照)．しかも等式(5)は $x<\xi$ のときも $x>\xi$ のときも成り立つ．不等式(1)において x_0 を x で，x を ξ で置き換えると二重不等式

$$(\xi - x)p(x,\ \xi)\,\mathrm{sign}\,(\xi - x) \leqq h(x,\ \xi)\,\mathrm{sign}\,(\xi - x)$$
$$\leqq (\xi - x)q(x,\ \xi)\,\mathrm{sign}\,(\xi - x)$$

が得られる．この二重不等式を正の数 $(\xi - x)\,\mathrm{sign}\,(\xi - x)$ で割ると

$$p(x,\ \xi) \leqq \frac{h(\xi) - h(x)}{\xi - x} \leqq q(x,\ \xi) \qquad (6)$$

が得られる．$f(x)$ は連続であるから

$$\lim_{\xi \to x} p(x,\ \xi) = \lim_{\xi \to x} q(x,\ \xi) = f(x)$$

となる．したがって，(6)で $\xi \to x$ のときの極限をとると，

$$h'(x) = f(x)$$

が得られる．すなわち(3)がこれで証明された．このようにして定積分の面積としての解釈が得られ，同時に $f(x)$ の不定積分が見つけ出される場合に面積を計算する方法も得られた．ここでつぎにこれを利用して境界が部分的に曲線になっている図形の面積を計算してみよう．

例 1　平面 P 上に水平に横軸をとり，垂直に縦軸をとり，座標の原点を o で表す．この平面上の方程式

$$2\gamma\xi = y^2$$

によって与えられる放物線を考察しよう．ただし γ は正の定数である．この放物線の軸は横軸の正の部分と一致する．横軸の正の部分上の点 x を通る垂線を引き，この垂線が放物線の上側の分岐と交わる点を a，下側の分岐と交わる点を a' とする．さて，放物線の部分 aoa' と垂直線分 $[aa']$によって囲まれる図形の面積 $S(x)$ を計算しよう．横軸によってこの図形は面積の等しい2つの部分に分割される．したがって，線分 $[ox]$ と線分 $[xa]$ と放物線部分 $[oa]$ で囲まれた図形の面積を計算する．放物線の上側の分岐は方程式

$$y = +\sqrt{2\gamma\xi}$$

で与えられる．したがって上で証明されたことによって（(4)参照)，目的の図形の上半分の面積は定積分

$$h(x) = \int_0^x \sqrt{2\gamma\xi}\ d\xi$$

で与えられる．すぐ確かめられるように

$$h(x) = \sqrt{2\gamma}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

である．なぜならこの関数に対して

$$h(0)=0, \quad h'(x)=\sqrt{2\gamma x}$$

となるからである．ゆえに，いま考察している図形の全面積 $S(x)$ は

$$S(x)=2h(x)=\frac{4}{3}\sqrt{2\gamma x^3}$$

に等しい．

17．積分和の極限としての定積分

前の16節において定積分の構成的な表し方に向けて1つの有意義なアプローチが試みられた．この節では，定積分を構成的な方法できちんと定義しよう．また同時に，前節で直観的に扱われていた面積の概念についても数学的な正式の定義が与えられることになろう．その際，関数の一様連続性の概念が使用される．つぎにまずこの一様連続性の定義を述べることにしよう．

一様連続性　実変数または複素変数 z の実数値または複素数値関数 $f(z)$ について考える．いま明らかにしなければならないのは，どんな条件を満たせば，この関数は一様連続であると見なすのか，ということである．このために変数の各1対 (z, ζ) に対して2つの負でない実数

$$|\zeta - z|, \quad |f(\zeta)-f(z)|$$

をつくる．このとき，変数の値の任意の対 (z, ζ) に対して，$|\zeta - z| \to 0$ のとき $|f(\zeta)-f(z)|$ が0に収束する場合がある．そこでこのことが成り立つならば，$f(z)$ は一様連続であるというのである．もっと正確にいうと，関数 $f(z)$ が**一様連続**であるというのは，任意の正の数 ε に対して，適当な小さい正の数 δ を選んで

$$|\zeta - z| < \delta \qquad (1)$$

ならば

$$|f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon \qquad (2)$$

が成り立つようにできることである．この条件を次の形の式で書き表す．

$$\lim_{|\zeta - z| \to 0} |f(\zeta)-f(z)| = 0$$

この定義において，z を固定し，ζ だけを変数と見なすと，z における関数の連続性の定義が得られる（10節，(5)参照）．

すでに知っているように，関数が連続であるというのは変数の各値において連続なことである．したがって，明らかに一様連続な関数は連続である．しかし，逆は必ずしも正しくないことがわかる（例参照）．

さてここで次のことを証明しよう．関数 $f(z)$ の変数の許容値全体の集合 M が有界な閉集合のとき，関数が連続ならば一様連続である．証明は矛盾を導き出す背理法で行う．連続関数 $f(z)$ は一様連続でないと仮定する．すなわち，ある正の数 ε が存在して，十分小さい正の数 δ を選ぶことができないとする（(*1*)と(*2*)参照)．

そうすると，この ε に対して，次の(*3*)と(*4*)を満たす数の対の列

$$z_1,\ \zeta_1\ ;\ z_2,\ \zeta_2\ ;\ \cdots\ ;\ z_n,\ \zeta_n\ ;\ \cdots$$

を選び出すことができる．

$$\lim_{n\to\infty} |\zeta_n - z_n| = 0 \tag{3}$$

であるが，しかし一方

$$|f(\zeta_n) - f(z_n)| \geqq \varepsilon > 0 \tag{4}$$

である．さて，M は有界な閉集合で，数列

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots \tag{5}$$

の項はすべて M に属しているから，この数列(*5*)から M の 1 つの点 z_0 に収束する部分列を取り出すことができる（4 節参照)．この部分列を表すのに新しい記号を別に導入しないことにして，数列(*5*)自体が z_0 に収束すると見なすことにする．したがって

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \tag{6}$$

そうすると(*3*)と(*6*)から

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n = z_0 \tag{7}$$

が得られる．実際，

$$|\zeta_n - z_0| \leqq |\zeta_n - z_n| + |z_n - z_0|$$

であるから，ここで $n\to\infty$ とすれば(*7*)が得られる．一方 $f(z)$ は連続であるから，z_0 においても連続である．したがって

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0) \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(\zeta_n) = f(z_0) \tag{9}$$

となる．さらに

$$|f(\zeta_n)-f(z_n)| \leqq |f(\zeta_n)-f(z_0)|+|f(z_n)-f(z_0)|$$

であるから，ここで $n\to\infty$ として極限をとると，(*8*)と(*9*)によって

$$\lim_{n\to\infty}|f(\zeta_n)-f(z_n)|=0$$

が得られる．これは(*4*)と矛盾する．

このようにして矛盾に行き着き，その結果，有界な閉集合 M の上で与えられた関数 $f(z)$ は，連続であれば同時に一様連続であることが証明された．

つぎに，関数 $f(\xi)$ を実変数 ξ の実数値連続関数で連結集合のうえで与えられた関数とし，$f(\xi)$ の定積分

$$h(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi \tag{10}$$

を構成的に表す問題の研究に移ることにしよう．積分の構成的な表し方は積分の近似値を作成することがもとになる．

16節と同じように，

$$p(x_0,\ x) \quad と \quad q(x_0,\ x) \tag{11}$$

をそれぞれ $f(\xi)$ の区間 $[x_0x]$ における最小値と最大値とする．さらに

$$\varepsilon(x_0,\ x)=q(x_0,\ x)-p(x_0,\ x) \tag{12}$$

とおく．この負でない式は $f(\xi)$ の $[x_0x]$ における振動の幅の特性を与えるものである．明らかに $[x_0x]$ の任意の2点 μ，ν に対して

$$|f(\mu)-f(\nu)| \leqq \varepsilon(x_0,\ x) \tag{13}$$

が成り立つ．

区間の分割　　区間 $[x_0x]$ を単調列

$$X=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots,\ x_k)\,; \quad x_k=x \tag{14}$$

によって分割しよう．$x_0<x$ のとき，単調列は

$$x_0<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_k \tag{15}$$

を意味する．また，$x_0>x$ のとき，単調列は

$$x_0>x_1>\cdots>x_i>\cdots>x_k \tag{16}$$

を意味する．したがってどちらの場合についても

$$\mathrm{sign}\,(x_i-x_{i-1})=\mathrm{sign}\,(x-x_0) \tag{17}$$

が成り立つ．この単調列によって区間 $[x_0x]$ は k 個の

$$[x_{i-1}x_i]$$

の形の小区間に分割される．このようにして単調列 X から得られた区間 $[x_0 x]$ の分割を，単に**分割** X とよぶことにする．特別の場合としては単調列

$$X = (x_0,\ x) \tag{18}$$

によって得られる分割がある．しかしこの分割では区間自身は実際には分割されない．積分(*10*)の構成的な表し方は区間 $[x_0 x]$ のいろいろの分割がもとになっている．したがって以下の考察では，分割 X を，区間 $[x_0 x]$ の k 個の小区間への分割を値とする変量と見なすことにする．ただし，k は固定しない．また変量 X は，以下の考察で必要ないくつかの実数値関数の変数になる．いま $\delta(X)$ によって

$$|x_i - x_{i-1}| \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

の最大値を表す．そうするとこの $\delta(X)$ は変数 X の関数である．なぜなら，分割 X が与えられるとこの値を計算できるからである．さて，$\delta(X)$ は分割 X の細かさを特徴づける量である．つまり，$\delta(X)$ が小さければ小さいほど分割 X は細かくなる．分割 X が区間 $[x_0 x]$ を k 個の等しい小区間に分割するならば

$$\delta(X) = \frac{|x - x_0|}{k}$$

となる．したがって区間 $[x_0 x]$ のどれだけでも細かい分割が存在する．なぜなら k を十分大きくとれば $\dfrac{|x - x_0|}{k}$ はどれだけでも小さくできるからである．

つぎに，$\varepsilon(X)$ によって $\varepsilon(x_{i-1},\ x_i)$ の最大値を表す（(*12*)参照)．負でない式 $\varepsilon(X)$ もまた変量 X の関数である．なぜなら分割 X が与えられるとこの式の値が計算できるからである．明らかに，μ と ν が分割 X による小区間の中の同じ 1 つの小区間に属しているならば

$$|f(\mu) - f(\nu)| \leqq \varepsilon(X)$$

が成り立つ（(*13*)参照)．$f(\xi)$ は連続であるから区間 $[x_0 x]$ 上で一様連続である．したがって，任意の正の数 ε に対して適当な小さい正の数 δ を選んで，$\delta(X) < \delta$ を満たすすべての分割 X に対して $\varepsilon(X) < \varepsilon$ が成り立つようにできる．いいかえると，$\delta(X)$ が 0 に収束するように X が変化するとき，$\varepsilon(X)$ もまた 0 に収束する．関数 $\varepsilon(X)$ のこの性質を次の形の式で書き表す．

$$\lim_{\delta(X)\to 0} \varepsilon(X) = 0 \tag{19}$$

さらに考察を進めるため分割 X の関数をもう1つ導入しよう．すなわち

$$\sigma(X) = (x_1 - x_0)f(\xi_1) + \cdots + (x_i - x_{i-1})f(\xi_i) + \cdots + (x_k - x_{k-1})f(\xi_k) \tag{20}$$

とおく．ただし，ξ_i は小区間 $[x_{i-1}x_i]$ の任意の点である．したがって，この定義では文字どおりの意味で $\sigma(X)$ は分割 X だけの関数ではない．なぜなら(20)の和を計算するためには分割 X のほかに点

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_i,\ \cdots,\ \xi_k \tag{21}$$

の値が必要だからである．したがって，

$$\sigma(X) = \sigma(X,\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_i,\ \cdots,\ \xi_k)$$

と書くほうが正確な書き表し方であろう．しかし一方，(20)は変量 X の1価関数ではなく，数列(21)の任意のとり方に依存して多くの値をとる関数と見ることもできる．そのように見ると，以下で証明される関数 $\sigma(X)$ のすべての性質は，そのすべての値に対して，つまり点列(21)の任意の選択に対して正しいということになる．また，(20)の式を簡潔に表すために

$$\sigma(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1})f(\xi_i) \tag{22}$$

と書く．これから和の記号 $\sum$ はたえず使用する．(22)は $x > x_0$ のときにも意味をもつ．しかし $x = x_0$ のとき区間 $[x_0x]$ は1点に退化してしまい，分割が不可能になる．それでこの場合便宜上

$$\sigma(X) = 0 \tag{23}$$

と見なすことにする．

積分和 $\sigma(X)$ は積分(10)の近似値になるものである．この近似は分割 X が細かくなればなるほど，すなわち $\delta(X)$ が0に近づけば近づくほどよくなるような近似である．

積分の定義　ここで次のことを証明しよう．$\delta(X) \to 0$ となるように分割 X が変化するとき，積分和 $\sigma(X)$ は1つの値に収束する．その極限値を $h(x)$ で表す．この命題を式の形で書き表すと

$$\lim_{\delta(X)\to 0} \sigma(X) = h(x) \tag{24}$$

となる．また，この命題を詳しく述べると次のとおりである．任意の正の数 ε に対して適当な小さい正の数 δ が存在して

$$\delta(X) < \delta$$

ならば

$$|\sigma(X)-h(x)|<\varepsilon \tag{25}$$

となる．

さて，(25)を満たす $h(x)$ が存在することを証明しよう．

まず第1に指摘したいのは，分割(18)に対して

$$\sigma(x_0,\ x)=(x-x_0)f(\xi)$$

が成り立つことである．ただし，ξ は $[x_0x]$ の任意の点である．つぎに，任意の分割 X に対して，不等式

$$|\sigma(x_0,\ x)-\sigma(X)|\leqq|x-x_0|\varepsilon(x_0,\ x) \tag{26}$$

が成り立つことを証明する．実際

$$\sigma(x_0,\ x)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_{i-1})f(\xi) \tag{27}$$

となり，この(27)から(22)をひくと

$$\sigma(x_0,\ x)-\sigma(X)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_{i-1})(f(\xi)-f(\xi_i)) \tag{28}$$

が得られる．また，(13)によって

$$|f(\xi)-f(\xi_i)|\leqq\varepsilon(x_0,\ x) \tag{29}$$

が成り立つ．(28)と(29)から

$$\begin{aligned}|\sigma(x_0,\ x)-\sigma(X)|&\leqq\sum_{i=1}^{k}|x_i-x_{i-1}|\varepsilon(x_0,\ x)\\&=|x-x_0|\varepsilon(x_0,\ x)\end{aligned}$$

が得られる．これで不等式(26)が証明された．

単調列（(15)と(16)参照)

$$X'=(x_0',\ x_1',\ \cdots,\ x_i',\ \cdots,\ x_l'),\quad x_0'=x_0,\ x_l'=x$$

が単調列 X （(14)参照）のすべての項を含むならば，分割 X' を分割 X の**細分**とよぶことにする．ここで，次のことを証明しよう．分割 X' が分割 X の細分ならば，不等式

$$|\sigma(X)-\sigma(X')|\leqq|x-x_0|\varepsilon(X) \tag{30}$$

が成り立つ．

分割 X' の分点で小区間 $[x_{i-1}x_i]$ に属しているものはこの小区間をさらに分割する．小区間 $[x_{i-1}x_i]$ のこの分割を X_i' で表す．(26)は区間 $[x_0x]$ と分割 X に対して成り立つ不等式であるが，この(26)を小区間 $[x_{i-1}x_i]$ と分割 X_i'

に適用すると

$$|\sigma(x_{i-1},\ x_i) - \sigma(X_i')| \leqq |x_i - x_{i-1}|\varepsilon(x_{i-1},\ x_i)$$
$$\leqq |x_i - x_{i-1}|\varepsilon(X) \tag{31}$$

が得られる．明らかに

$$\sigma(X') = \sum_{i=1}^{k} \sigma(X_i') \tag{32}$$

$$\sigma(X) = \sum_{i=1}^{k} \sigma(x_{i-1},\ x_i) \tag{33}$$

である．(*33*)から(*32*)をひき，(*31*)を用いると

$$|\sigma(X) - \sigma(X')| = \left|\sum_{i=1}^{k} (\sigma(x_{i-1},\ x_i) - \sigma(X_i'))\right|$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{k} |x_i - x_{i-1}|\varepsilon(X) = |x - x_0|\varepsilon(X)$$

が得られる．これで不等式(*30*)が証明された．

つぎに，X と X'' を区間 $[x_0x]$ の 2 つの分割とする．このとき不等式

$$|\sigma(X) - \sigma(X'')| \leqq |x - x_0|(\varepsilon(X) + \varepsilon(X'')) \tag{34}$$

が成り立つことを証明しよう．分割 X と X'' の分点を全部まとめて 1 つにして，それに属する点を並べて単調列をつくる．このようにして得られた単調列を X' とする．明らかに分割 X' は分割 X と X'' の共通の細分である．したがって(*30*)を用いると

$$|\sigma(X'') - \sigma(X')| \leqq |x - x_0|\varepsilon(X'') \tag{35}$$

が得られる．不等式(*30*)と(*35*)から不等式(*34*)が得られる．

これで目的の $h(x)$ を求めることができる（(*24*)参照）．このためまず区間 $[x_0x]$ の分割の列

$$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n,\ \cdots$$

で，条件

$$\lim_{n\to\infty} \delta(X_n) = 0 \tag{36}$$

を満たすものを任意に 1 つ選ぶ．このとき数列

$$\sigma(X_1),\ \sigma(X_2),\ \cdots,\ \sigma(X_n),\ \cdots \tag{37}$$

は収束することが示される．この極限を $h(x)$ とおく．そうすると

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(X_n) = h(x) \tag{38}$$

である．数列(*37*)が収束することを示すため，(*37*)がコーシーの収束条件

(3節参照) を満たすことを証明する．そのため不等式(*34*)を用いて $|\sigma(X_r) - \sigma(X_s)|$ を評価しよう．(*34*)によって

$$|\sigma(X_r) - \sigma(X_s)| \leqq |x - x_0|(\varepsilon(X_r) + \varepsilon(X_s)) \tag{39}$$

が成り立つ．$\delta(X_n)$ は 0 に収束するから((*36*)参照)，$\varepsilon(X_n)$ もまた 0 に収束する ((*19*)参照)．したがって(*39*)の右辺は r，s がどちらも限りなく大きくなるとき 0 に収束する．これは(*37*)がコーシーの条件を満たすことを意味している．ゆえに数列(*37*)の極限 $h(x)$ が存在する((*38*)参照)．

今度はこの $h(x)$ は(*24*)を満たすことが証明できる．このため $|\sigma(X) - h(x)|$ を評価しよう．

$$\begin{aligned}|\sigma(X) - h(x)| &\leqq |\sigma(X) - \sigma(X_n)| + |\sigma(X_n) - h(x)| \\ &\leqq |x - x_0|(\varepsilon(X) + \varepsilon(X_n)) + |\sigma(X_n) - h(x)|\end{aligned}$$

この不等式で $n \to \infty$ のときの極限をとると

$$|\sigma(X) - h(x)| \leqq |x - x_0|\,\varepsilon(X) \tag{40}$$

これから(*19*)を用いて(*24*)が得られる．

ここで，定積分を最終的に積分和の極限として定義しよう．すなわち

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi = \lim_{\delta(X)\to 0} \sigma(X)$$

と定義する．

さて，次の積分の評価を与える重要な不等式を証明しよう．

$$\begin{aligned}(x - x_0)p(x_0,\ x)\,\mathrm{sign}\,(x - x_0) &\leqq \mathrm{sign}\,(x - x_0)\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi \\ &\leqq (x - x_0)q(x_0,\ x)\,\mathrm{sign}\,(x - x_0)\end{aligned} \tag{41}$$

不等式(*41*)を証明するために区間 $[x_0 x]$ の任意の分割 X を考える．このとき

$$p(x_0,\ x) \leqq f(\xi_i) \leqq q(x_0,\ x), \quad i = 1,\ \cdots,\ k$$

が成り立つ((*11*)と(*14*)参照)．この不等式に正の数 $(x_i - x_{i-1})\,\mathrm{sign}\,(x_i - x_{i-1})$ を掛けて，i について 1 か k まで加えると，(*17*)を考慮すれば不等式

$$\begin{aligned}(x - x_0)p(x_0,\ x)\,\mathrm{sign}\,(x - x_0) &\leqq (\mathrm{sign}\,(x - x_0))\sigma(X) \\ &\leqq (x - x_0)q(x_0,\ x)\,\mathrm{sign}\,(x - x_0)\end{aligned} \tag{42}$$

が得られる．この不等式において $\delta(X) \to 0$ のときの極限をとると不等式

(41)が得られる.

これで研究はようやく終りの段階に入り，最後に関数 $h(x)$ は条件

$$h(x_0) = 0 \tag{43}$$

$$h'(x) = f(x) \tag{44}$$

を満たすこと，すなわち $h(x)$ は14節で与えられた定義の意味での $f(x)$ の定積分であることを証明しよう（14節，(2)，(4)参照).

ところで(43)は(23)から得られるので(44)を証明することにする.

区間 $[x_0x]$ を，x_0 と x の間の点 x^1 によって2つの区間に分割する．そのときに，x_0，x_1 をそれぞれ $x_0 = x^0$，$x = x^2$ と記号を書き換える．区間 $[x^0x^1]$ の分割 X^1 と区間 $[x^1x^2]$ の分割 X^2 をつくる．単調列 X^1 と X^2 の点列をそのままの順序で全部並べて得られる単調列を X^1X^2 と書くことにすると，X^1X^2 は区間 $[x^0x^2]$ の分割になる．明らかに

$$\sigma(X^1) + \sigma(X^2) = \sigma(X^1X^2) \tag{45}$$

となる．ここで $\delta(X^1) \to 0$，$\delta(X^2) \to 0$ のときの極限をとると(45)から

$$\int_{x^0}^{x^1} f(t)\,dt + \int_{x^1}^{x^2} f(t)\,dt = \int_{x^0}^{x^2} f(t)\,dt \tag{46}$$

が得られる.

微分係数 $h'(x)$ を計算するために，いつものように x の近くに x と異なる ξ をとり，差 $h(\xi) - h(x)$ をつくる．この差を計算するために(46)を使用する．ξ が $[x_0x]$ の外にあるときは，x は区間 $[x_0\xi]$ を分割する．したがって(46)によって

$$\int_{x^0}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{\xi} f(t)\,dt = \int_{x^0}^{\xi} f(t)\,dt$$

となる．ξ が $[x_0x]$ の中にあるときは，やはり(46)によって

$$\int_{x^0}^{\xi} f(t)\,dt + \int_{\xi}^{x} f(t)\,dt = \int_{x^0}^{x} f(t)\,dt$$

となる．したがって第1の場合は

$$h(\xi) - h(x) = \int_{x_0}^{\xi} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x}^{\xi} f(t)\,dt \tag{47}$$

となり，第2の場合は

$$h(\xi) - h(x) = \int_{x_0}^{\xi} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = -\int_{\xi}^{x} f(t)\,dt \tag{48}$$

となる．等式(47)と(48)の右辺に二重不等式(41)を適用すると，第1の場合

は

$$(\xi - x)p(x,\ \xi)\operatorname{sign}(\xi - x) \leqq (\operatorname{sign}(\xi - x))(h(\xi) - h(x)) \leqq (\xi - x)q(x,\ \xi)\operatorname{sign}(\xi - x) \tag{49}$$

が得られ，第2の場合には

$$(x - \xi)p(\xi,\ x)\operatorname{sign}(x - \xi) \leqq (\operatorname{sign}(x - \xi))(h(x) - h(\xi)) \leqq (x - \xi)q(\xi,\ x)\operatorname{sign}(x - \xi) \tag{50}$$

が得られる．$p(x,\ \xi) = p(\xi,\ x)$，$q(x,\ \xi) = q(\xi,\ x)$ であるから，不等式 (*49*) と (*50*) をそれぞれ正の数

$$(\xi - x)\operatorname{sign}(\xi - x) = (x - \xi)\operatorname{sign}(x - \xi)$$

で割ると，どちらの場合についても同じ不等式

$$p(x,\ \xi) \leqq \frac{h(\xi) - h(x)}{\xi - x} \leqq q(x,\ \xi)$$

が得られる．この不等式において $\xi \to x$ のときの極限をとると，$p(x,\ \xi)$ も $q(x,\ \xi)$ も同じ $f(x)$ に収束するから

$$h'(x) = f(x)$$

となる．ゆえに，(*44*) が証明された．

つぎにここで得られた積分法の一般化について述べよう．

区分的連続関数　実変数 x の実数値関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続でないとき，点 a を $f(x)$ の**不連続点**という．最も単純な不連続点はいわゆる**第1種の不連続点**である．関数 $f(x)$ の不連続点 a が第1種の不連続点であるというのは，次の2条件が満たされることである．

（1）点 a の近くには $f(x)$ のほかの不連続点は存在しない．すなわち小さい正の数 ε が存在して区間 $|x - a| < \varepsilon$ の中には点 a 以外に不連続点が存在しない．

（2）x が a より小さいまま a に近づくとき，$f(x)$ は極限に近づく．この極限は象徴的な記号 $f(a - 0)$ で表される．式では

$$\lim_{\substack{x<a \\ x\to a}} f(x) = f(a - 0)$$

と書く．x が a より大きいまま a に近づくとき，$f(x)$ の極限が存在する．

この極限は象徴的な記号 $f(a+0)$ で表される．式では

$$\lim_{\substack{x>a \\ x\to a}} f(x) = f(a+0)$$

と書く．

ところで，不連続点 a における関数の値 $f(a)$ は普通何も特別な役割を果たさないので考察の対象にならない．また，関数 $f(x)$ が**区分的連続**であるというのは，不連続点はすべて第1種の不連続点で，しかも $f(x)$ の変域のどの有限区間においても有限個の不連続点しか存在していないことである．さて，区分的連続関数 $f(x)$ の定積分

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$$

の定義は容易である．最初に $x_0 < x$ と仮定してこの積分を定義しよう．さらに，区間 $[x_0 x]$ の中に関数 $f(x)$ は区間の端点以外に不連続点をもたないと仮定する．したがって区間のどちらの端点も第1種の不連続点か連続点である．x_0 が $f(x)$ の不連続点の場合，x_0 における $f(x)$ の値を改め $f(x_0) = f(x_0+0)$ と定義する．x が $f(x)$ の不連続点の場合，x における $f(x)$ の値を改め $f(x) = f(x-0)$ と定義する．x_0 と x でこのように関数値を修正して得られた関数 $f(x)$ は区間 $[x_0 x]$ 全体で連続である．したがってこの関数の積分は定まり，与えられた関数の積分はこの積分で定義される．つぎに積分区間 $[x_0 x]$ が一般の場合，これを有限個の小区間に分割して，各小区間の内部に不連続点が存在しないようにできる．この場合，$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$ はこれらの小区間上の積分全部の和として定義される．$x_0 > x$ の場合も全く同じようにして積分が定義される．

区分的に滑らかな関数　　連続関数 $h(x)$ が区分的に滑らかであるというのは，$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ が区分的連続関数になることである．容易にわかるように，区分的連続関数 $f(x)$ の積分

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$$

は区分的に滑らかな関数で，$h'(x) = f(x)$ は $f(x)$ の不連続点以外のすべての点で成り立つ．

実変数の複素数値関数 $f(x)$ の積分法　　関数 $f(x)$ は次のように表すこと

ができる．

$$f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$$

ただし，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ は実変数 x の実数値関数である．X を積分区間 $[x_0x]$ の分割とする．複素数値関数 $f(x)$ に対して σ 型の積分和をつくる．すなわち

$$\sigma(X) = \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j) \tag{51}$$

とおく．ただし，ξ_j は $[x_{j-1}x_j]$ の点である．さらに

$$\sigma_1(X) = \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) \varphi(\xi_j)$$

$$\sigma_2(X) = \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) \psi(\xi_j)$$

とおく．明らかに

$$\sigma(X) = \sigma_1(X) + i\sigma_2(X) \tag{52}$$

である．実数値連続関数 $\varphi(\xi)$，$\psi(\xi)$ に対して等式

$$\lim_{\delta(X)\to 0} \sigma_1(X) = \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$\lim_{\delta(X)\to 0} \sigma_2(X) = \int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi$$

が成り立つから，(51)と(52)によって，$\delta(X)\to 0$ のとき積分和 $\sigma(X)$ の極限が存在する．したがってこの極限を $f(\xi)$ の積分と定義することができる．ゆえに

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi = \lim_{\delta(X)\to 0} \sigma(X) = \int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi + i\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi \tag{53}$$

が得られる．また，与えられた複素数値関数 $f(\xi)$ が連続ではなくて区分的連続である場合，$f(\xi)$ の積分は実数値区分的連続関数の積分の場合と同じように定義することができる．しかも積分をそのように定義しても(53)の関係はそのまま成り立つ．

さて，関数 $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ に対して等式

$$\int_{x_0}^{x_0} \varphi(\xi)\, d\xi = 0, \quad \int_{x_0}^{x_0} \psi(\xi)\, d\xi = 0$$

および

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} \varphi(\xi)\, d\xi = \varphi(x), \quad \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\, d\xi = \psi(x)$$

が成り立つから，複素数値関数 $f(x)$ に対しても同じ等式が成り立つ．すなわ

ち

$$\int_{x_0}^{x_0} f(\xi)\,d\xi = 0, \quad \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi = f(x) \tag{54}$$

このようにして，この節で定義された実変数 x の複素数値関数の積分

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi \tag{55}$$

は条件(54)を満たすこと，すなわち14節の意味での積分であることが確かめられた．したがって，14節で得られた結果はすべて積分(55)に対して成り立つ．とくに

$$\int_{x_0}^{x_1} f(\xi)\,d\xi + \int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\,d\xi = \int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\,d\xi \tag{56}$$

も成り立つ．

また，実変数 ξ の複素数値関数の積分

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi \tag{57}$$

において，被積分関数が不等式

$$|f(\xi)| \leqq m$$

を満たすならば，積分(57)に対して次の評価が成り立つ．

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi\right| \leqq m|x - x_0| \tag{58}$$

これは等式

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi = \lim_{\delta(X)\to 0}\sum_{j=1}^{k}(x_j - x_{j-1})f(\xi_j)$$

からただちに得られる（(51)参照)．

例　ここで連続であるが一様連続でない関数の例をあげておこう．$f(x) = \dfrac{1}{x}$ とおく．この関数を不等式 $0 < x \leqq 1$ を満たす x に対して考察する．そうすると，この関数は連続であるが，一様連続でない．なぜなら，

$$f(\xi) - f(x) = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{x} = \frac{x-\xi}{x\xi}$$

は，$|x-\xi| < \delta$ のとき，x と ξ が 0 に近づくと，どれだけでも大きくなるからである．

18. 面積と曲線の長さ

16 節において，曲線四辺形の面積，つまり連続関数のグラフと横軸と横軸に垂直な 2 つの直線によって囲まれた図形の面積について述べられたが，そこでは面積の概念自体はすでに理解が得られているものと見なされていた．良識ある人々にとって，面積が測定できるのは当然のことであったと思われる．しかし，このような常識としての当然のことはときには正しくないことがある．したがって，曲線で囲まれた平面図形の面積についても，面積とは何か，よく吟味して明らかにする必要がある．全く同じことが曲線の長さについてもいえる．このような思い込みから抜け出るためには，数学者がいうように，問題の概念を厳密に定義することが必要である．ここでは面積と曲線の長さを厳密に定義し，同時にそれらを積分を用いて計算することにしよう．

面積　　実変数 ξ の実数値連続関数 $f(\xi)$ について考えよう．座標平面上のこの関数のグラフを C で表そう．横軸上に区間 $[x_0x]$ をとり，その端点を通る垂線が C と交わる点をそれぞれ a_0，a で表そう．便宜上 $x_0 < x$ と仮定し，さらに C の部分 $[a_0a]$ は横軸の上側にあると仮定する．このとき，横軸上の線分 x_0x と垂直な線分 x_0a_0 および xa とグラフ C の部分 a_0a で囲まれた図形ができる（図 11 参照）．さて，この曲線四辺形の面積の測定の問題を提起しよう．しかもうまく解決できることを期待して，あらかじめこの面積なる量を S で表すことにしよう．

横軸上に 2 点 μ，ν をとり，$p(\mu,\ \nu)$ で $f(\xi)$ の $[\mu\nu]$ 上の最小値を表し，$q(\mu,\ \nu)$ で $f(\xi)$ の $[\mu\nu]$ 上での最大値を表す．区間上の連続関数はその区間上で最小値と最大値をとるから（12 節参照），2 つの等式

$$p(\mu,\ \nu) = f(\xi'),\quad q(\mu,\ \nu) = f(\xi'')$$

が成り立つ．ただし，ξ'，ξ'' は $[\mu\nu]$ の点である．

さて，$[x_0x]$ の分割

$$X = (x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots,\ x_k),\quad x_k = x$$

をつくる（17 節，(*14*)参照）．ξ_i' で $f(\xi)$ が $[x_{i-1}x_i]$ 上の最小値をとる点を表し，ξ_i'' で $f(\xi)$ が $[x_{i-1}x_i]$ 上の最大値をとる点を表す．2 つの和

$$\sigma'(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i')$$

$$\sigma''(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i'')$$

をつくる．これらの等式から明らかなように，$\sigma'(X)$，$\sigma''(X)$ は多価関数 $\sigma(X)$ の 2 つの値である（17 節参照）．したがって次の 2 次の等式が成り立つ．

$$\lim_{\delta(X)\to 0} \sigma'(X) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \qquad (1)$$

$$\lim_{\delta(X)\to 0} \sigma''(X) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \qquad (2)$$

さて，図 12 の図形の面積を幾何的に表してみよう．このため，P_i で底辺 $x_{i-1}x_i$，高さ $f(\xi_i')$ の長方形を表し，Q_i で底辺 $x_{i-1}x_i$，高さ $f(\xi_i'')$ の長方形を表そう．そうすると，長方形 P_i の面積は $(x_i - x_{i-1})f(\xi_i')$ に等しく，長方形 Q_i の面積は $(x_i - x_{i-1})f(\xi_i'')$に等しい．どの長方形 P_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ も曲線四辺形 x_0xaa_0 に含まれているから，これらの面積全体の和は曲線四辺形 x_0xaa_0 の面積 S を超えない．一方，Q_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ の全体は曲線四辺形 x_0xaa_0 を含んでいるから，S はこれら Q_i の面積全体の和を超えない．したがって，曲線四辺形 x_0xaa_0 の面積が測定できて，それが S に等しいと仮定すれば，この S について二重不等式

$$\sigma'(X) \leqq S \leqq \sigma''(X) \qquad (3)$$

が得られる．さて，以上の考察から，$\sigma'(X)$ と $\sigma''(X)$ は S の近似値であり，しかも S が二重不等式(3)から得られるように $\sigma'(X)$ は S を下から，$\sigma''(X)$ は S を上からそれぞれ評価していると見なすのは合理的な解釈である．したがって，これら 2 つの評価 $\sigma'(X)$ と $\sigma''(X)$ は分割 X が限りなく細かくなるように変化するとき，同じ 1 つの値に収束するから((1)，(2)参照)，結論として，曲線四辺形 x_0xaa_0 の面積は測定可能で，その面積は定積分

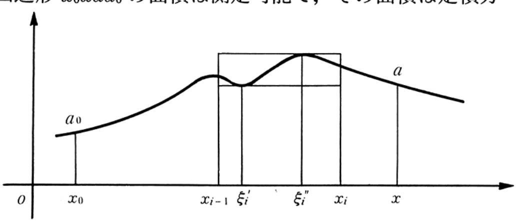


図 12

$$S=\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$$

によって定義されることになる．このようにして，面積の数学的な正式の定義は直観的な測定の仕方によるものと結果としては一致する．

曲線の長さ　今度は実変数 x の実数値関数 $f(x)$ で連続な導関数をもつものについて考えよう．$[x_0x]$ を横軸上の区間とし，しかも $x_0<x$ で，$f(x)$ はこの区間上で定義されているとする．また，X を区間 $[x_0x]$ の分割とする（17節参照）．座標平面 P 上の $f(x)$ のグラフを C で表す（図13）．x_i を通る垂線と C との交点を a_i とする．線分

$$[a_0a_1],\ [a_1a_2],\ \cdots,\ [a_{k-1}a_k]$$

から構成される折線

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_k=a$$

をつくる．線分 $[a_{i-1}a_i]$ の長さを $l(a_{i-1},\ a_i)$ で表す．折線の長さを $l(X)$ で表す．すなわち

$$l(X)=\sum_{i=1}^{k} l(a_{i-1},\ a_i) \tag{4}$$

とおく．容易に確かめられるように，$|x_i-x_{i-1}|\to 0$ ならば $l(a_{i-1},\ a_i)\to 0$ である．さて，グラフ C の部分 $[a_0a]$ の長さを極限

$$s(x_0,\ x)=\lim_{\delta(X)\to 0} l(X)$$

として定義しよう．そのためにはこの極限が存在することを証明し，その極限が1つの定積分で書き表せることを示せば十分である．つぎにこの極限の存在を証明し，その積分表示を求めてみよう．点 a_{i-1} を通る横軸に平行な直線を

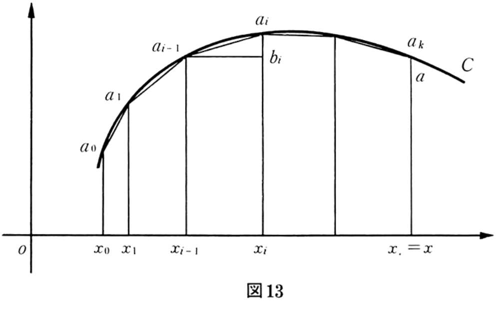


図13

引き，その直線と点 x_i，a_i を通る垂線と交わる点を b_i とする．このとき，線分 $[a_{i-1}a_i]$ は直角三角形の斜辺であるからその長さは公式を用いて次のように書き表される．

$$l(a_{i-1},\ a_i)=\sqrt{(l(a_{i-1},\ b_i))^2+(l(b_i,\ a_i))^2}$$

また，$l(a_{i-1},\ a_i)=x_i-x_{i-1}$，$l(b_i,\ a_i)=|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ であるから，$l(a_{i-1},\ a_i)$ に対して

$$l(a_{i-1},\ a_i)=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

が得られる．ラグランジュの公式（12 節参照）によって

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

となる．ただし，ξ_i は $[x_{i-1}x_i]$ の中の 1 点である．したがって折線全体の長さ $l(X)$ は

$$l(X)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}$$

で与えられる．この式の右辺は関数 $\sqrt{1+(f'(\xi))^2}$ の σ 型の積分和にほかならない（17 節参照）．ゆえに

$$s(x_0,\ x)=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+(f'(\xi))^2}\,d\xi \tag{5}$$

が成り立つ．このようにして，(4)の極限の存在と，その極限は(5)の積分で計算できることが同時に証明された．

19．パラメータ表示による曲線の長さ

数学自体においてもまた数学の自然科学への応用においても，非常に多くの量が定積分を用いて書き表され，あるいはまた定義されている．その際，これらの量を書き表すときに現れる積分はしばしば 17 節の積分和に類似の有限和の極限になっている．しかし，それらの和は 17 節で述べられた形の和よりももっと一般的な形の和である．この一般的な形の和と 17 節で考察された和の関係を明確にするために，ここでは和の研究にいわゆる無限小を導入することにしよう．この無限小とは区間 $[x_0x]$ の分割が限りなく細かくなるとき 0 に収束する量のことである．つぎにこの和について考察しよう．

さて，横軸上の区間 $[x_0x]$ をもとにして，区間 $[x_0x]$ 上の任意の区間 $[\mu\nu]$

に対応して実数または複素数 $\rho(\mu,\ \nu)$ が定まると仮定する．さらに，$\rho(\mu,\ \nu)$ は $|\nu-\mu|$ とともに 0 に収束すると仮定する．すなわち正確にいうと，任意の正の数 ε に対して適当な小さい正の数 δ が存在して

$$|\nu-\mu|<\delta \tag{1}$$

ならば

$$|\rho(\mu,\ \nu)|<\varepsilon \tag{2}$$

となる，と仮定する．関数 $\rho(\mu,\ \nu)$ のこの性質を式で

$$\lim_{|\nu-\mu|\to 0}\rho(\mu,\ \nu)=0 \tag{3}$$

と書き表す．このとき，この性質をもつ区間 $[\mu\nu]$ の関数 $\rho(\mu,\ \nu)$ を**無限小**とよぶ．

さて，区間 $[x_0x]$ の分割 X

$$X=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_k),\quad x_k=x$$

が与えられたとしよう（17 節，(*14*)参照)．区間 $[x_0x]$ のこの分割 X に対して，無限小 $\rho(\mu,\ \nu)$ をもとにして

$$\rho(X)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-x_{i-1})\rho(x_{i-1},\ x_i)$$

をつくる．このとき，次のことがわかる．すなわち，分割 X が限りなく細かくなるとき $\rho(X)\to 0$ となる．式でこれは

$$\lim_{\delta(X)\to 0}\rho(X)=0 \tag{4}$$

と書くことができる．

この(*4*)を証明するために，任意の小さい正の数 ε をとり，それに対して不等式(*1*)，不等式(*2*)が得られるような小さい正の数 δ を選ぶ．さて，分割 X は十分細かいとしよう．すなわち X は条件

$$\delta(X)<\delta$$

を満たすとする．そのとき，分割 X の各小区間に対して

$$|x_i-x_{i-1}|<\delta$$

が成り立つ．したがって，不等式(*2*)によって

$$|\rho(x_{i-1},\ x_i)|<\varepsilon$$

が成り立つ．このとき，$\rho(X)$ に対して

$$|\rho(X)|\leqq\sum_{i=1}^{k}|x_i-x_{i-1}||\rho(x_{i-1},\ x_i)|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{k} |x_i - x_{i-1}| \varepsilon = |x - x_0| \varepsilon$$

が得られる．ε は任意に小さい正の数であるから，この不等式から(4)が得られる．

区分的に滑らかな曲線　$\varphi(t)$ と $\psi(t)$ を実変数 t の実数値関数とする．

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{5}$$

とおくことによって，座標平面 P 上の曲線のパラメータ表示が得られる．この曲線は，t が増加または減小しながら変化するとき，点

$$(x, y) = (\varphi(t), \psi(t)) \tag{6}$$

によって描かれる曲線である．この曲線が**区分的に滑らか**であるというのは，関数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ が区分的に滑らかで（17節参照），しかも微分係数 $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ が t のどの値に対しても同時に 0 にならないことである．t において $\varphi'(t)$ と $\psi'(t)$ の中の少なくとも 1 つが不連続になるとき，曲線上の対応する点 t を**角点**とよぶ．さらに，角点に近づくとき $\varphi'(t)$ と $\psi'(t)$ は同時に 0 に収束しないと仮定する（曲線上の角点でない点を**正則点**とよぶ）．さて，いま考察している曲線は角点によっていくつかの部分弧に分割される．ただし，これらの部分弧自体は滑らかな曲線である．したがって，区分的に滑らかな曲線の長さを論理的に定義しその長さを計算するためには，その曲線の滑らかな部分弧の長さを計算し，その後でそれらの長さを全部加えればよい．ゆえに，区間 $[t_0 t]$ 上で滑らかな曲線について，曲線の長さを定義し，それを計算すれば十分である．

さて，区間 $[t_0 t]$ 上で方程式(5)によって与えられた滑らかな曲線の長さを論理的に定義し，その長さを計算しよう．

$$T = (t_0, t_1, \cdots, t_k), \quad t_k = t$$

を区間 $[t_0 t]$ の分割とする（17節，(14)参照）．前のときと同じように，数列 T は単調列であるとしよう．また

$$\alpha_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$$

とおき，α_i で座標 $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ の点を表す．そうすると，数列

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_k$$

は $[\alpha_{i-1}\alpha_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ の形の線分から構成される折線をつくる．線分 $[\alpha_{i-1}\alpha_i]$ の長さを $l(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ で表す．ただし，$t_{i-1} < t_i$ のときは正で，$t_i <$

t_{i-1} のときは負と見なすことにする．この折線の長さ $l(T)$ は

$$l(T) = \sum_{i=1}^{k} l(\alpha_{i-1},\ \alpha_i)$$

で表される．したがって，$l(T)$ は $t_0 < t$ のとき正で，$t < t_0$ のとき負である．さらに 17 節の場合と同じように，$\delta(T)$ で $|t_i - t_{i-1}|$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ の最大値を表す．さてここで，$\delta(T) \to 0$ のとき，$l(T)$ は 1 つの極限に収束することを証明し，その極限を**曲線の長さ**とよぶことにしよう．次の等式を証明しよう．

$$\lim_{\delta(T)\to 0} l(T) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2}\, d\tau \tag{7}$$

等式(7)の証明に進もう．パラメータ t の 2 つの値 μ と ν をとり，点 $(\varphi(\mu),\ \psi(\mu))$ と $(\varphi(\nu),\ \psi(\nu))$ をそれぞれ β と γ で表す．線分 $[\beta\gamma]$ の長さを $l(\beta,\ \gamma)$ で表す．ただし，$l(\beta,\ \gamma)$ は $\mu < \nu$ のとき正，$\nu < \mu$ のとき負と見なすことにする．明らかに

$$l(\beta,\ \gamma) = \mathrm{sign}\,(\nu - \mu)\sqrt{(\varphi(\nu) - \varphi(\mu))^2 + (\psi(\nu) - \psi(\mu))^2}$$

である．つぎに線分 $[\mu\nu]$ の関数 $\rho(\mu,\ \nu)$ を次のようにつくる．すなわち

$$\rho(\mu,\ \nu) = \frac{l(\beta,\ \gamma)}{\nu - \mu} - \sqrt{(\varphi'(\nu))^2 + (\psi'(\nu))^2} \tag{8}$$

とおく．このとき，関数 $\rho(\mu,\ \nu)$ は条件

$$\lim_{|\nu-\mu|\to 0} \rho(\mu,\ \nu) = 0 \tag{9}$$

を満たすこと，すなわち関数 $\rho(\mu,\ \nu)$ は無限小であることを証明しよう((3)参照)．そうすると後で示すようにこれから容易に目的の式(7)が得られる．

(9)の証明に移ろう．ラグランジュの公式（12 節参照）によって

$$\varphi(\nu) - \varphi(\mu) = (\nu - \mu)\varphi'(\tau_1)$$

$$\psi(\nu) - \psi(\mu) = (\nu - \mu)\psi'(\tau_2)$$

が成り立つ．ただし，τ_1，τ_2 は $[\mu\nu]$ の点である．したがって，

$$\frac{\rho(\beta,\ \gamma)}{\nu - \mu} = +\sqrt{(\varphi'(\tau_1))^2 + (\psi'(\tau_2))^2}$$

が成り立つ．さらに，

$$\omega = (\varphi'(\tau_1))^2 + (\psi'(\tau_2))^2, \quad w = (\varphi'(\nu))^2 + (\psi'(\nu))^2$$

とおく．したがって，(8)から

$$\rho(\mu,\ \nu) = \sqrt{\omega} - \sqrt{w}$$

が得られる．平方根は一様連続関数であるから，任意の正の数 ε に対して，適当な小さい正の数 ε_1 が存在して

$$|\omega - w| < \varepsilon_1$$

のとき

$$|\rho(\mu,\ \nu)| = |\sqrt{\omega} - \sqrt{w}| < \varepsilon \tag{10}$$

が成り立つ．さらに，

$$|\omega - w| \leqq |(\varphi'(\tau_1))^2 - (\varphi'(\nu))^2| + |(\psi'(\tau_2))^2 - (\psi'(\nu))^2|$$

となる．

$$|\nu - \tau_1| \leqq |\nu - \mu|,\quad |\nu - \tau_2| \leqq |\nu - \mu|$$

であるから，与えられた ε_1 に対して，適当な小さい正の数 δ を見つけて

$$|\nu - \mu| < \delta \tag{11}$$

のとき

$$|(\varphi'(\tau_1))^2 - (\varphi'(\nu))^2| < \frac{\varepsilon_1}{2},\quad |(\psi'(\tau_2))^2 - (\psi'(\nu))^2| < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

が成り立つようにできる．したがって，任意の正の数 ε に対して正の数 δ を選んで，不等式(*11*)が成り立つとき不等式(*10*)も成り立つようにできる．すなわち関数 $\rho(\mu,\ \nu)$ は無限小である．したがって

$$\begin{aligned} l(T) &- \sum_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1})\sqrt{(\varphi'(t_i))^2 + (\psi'(t_i))^2} \\ &= \sum_{i=1}^{k}\left(l(\alpha_{i-1},\ \alpha_i) - (t_i - t_{i-1})\sqrt{(\varphi'(t_i))^2 + (\psi'(t_i))^2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1})\rho(t_{i-1},\ t_i) \end{aligned} \tag{12}$$

が得られる．$\rho(\mu,\ \nu)$ は無限小であるから，(*12*)の右辺は $\delta(T) \to 0$ のとき 0 に収束する((*4*)参照)．ゆえに

$$\lim_{\delta(T)\to 0} l(T) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2}\, d\tau \tag{13}$$

が成り立つ．このようにして，区分的に滑らかな曲線の長さが存在し，その長さは積分(*13*)で与えられることが証明された．

例　曲線がパラメータ表示(*5*)によって与えられたとき，この曲線上の点の位置はパラメータ t の値から定まる((*6*)参照)．したがって，パラメータ t は本質的には曲線上の点の座標と見なせる．以前からよくやっているように，曲線上のパラメータの値 t に対応する点を単に点 t ということにする．そうす

ると，パラメータの2つの異なる値 $t=t'$，$t=t''$ $(t'\neq t'')$ に対して，座標平面上の同じ1点が対応することがある．この場合

$$(\varphi(t'),\ \psi(t'))=(\varphi(t''),\ \psi(t''))$$

が成り立つ．しかし，このような2点 t' と t'' は曲線上では異なった点と見なし，これらの点が平面上で同一の点となるのは，その曲線が自分自身と交わることであると考える．さて，点 t_0 と t の間の曲線弧の長さ s は(*13*)によって与えられる．したがってこの長さ s は t の関数である．

$$s=s(t) \tag{14}$$

しかも

$$\frac{ds}{dt}=+\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2} \tag{15}$$

で，$\dfrac{ds}{dt}$ はいたるところで正である．方程式(*14*)は t について解くことができて，

$$t=t(s) \tag{16}$$

が得られる．しかも

$$t'(s)=\frac{1}{\dfrac{ds}{dt}}>0$$

である．ここでは方程式(*14*)が t について解けることは証明しない．しかしこのことは，座標平面上に関数 $s(t)$ のグラフを描いてみればわかるように，幾何学的には全く明らかである．さて，パラメータ表示(*5*)において t を(*16*)式の s で表すと，等式

$$x=\varphi(t(s)),\quad y=\psi(t(s)) \tag{17}$$

が得られる．方程式(*17*)はパラメータ t の代わりに新しいパラメータ s を用いた同じもとの曲線のパラメータ表示の方程式と考えることができる．したがって，s もまたいま考察している曲線上の点の座標と見なすことができる．この場合，点 t_0 は座標 $s=0$ の点，つまり新しい座標系の原点になる．また，座標の原点から点 s までの曲線弧の長さはちょうど s に等しい．曲線に対して導入されたこの新しいパラメータは曲線を記述するのに最も都合のよいパラメータである．しかしこのために別に改めて記号を導入するのはやめて，曲線はパラメータ表示

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s)$$

によって与えられたものと見なすことにしよう．そうすると(15)は今度は

$$\frac{ds}{ds} = \sqrt{(\varphi'(s))^2 + (\psi'(s))^2}$$

となる．したがって，

$$(\varphi'(s))^2 + (\psi'(s))^2 = 1 \tag{18}$$

である．いま，座標平面上の原点から点$(\varphi(s), \psi(s))$へ向かうベクトルを$\chi(s)$で表すことにすると

$$\chi(s) = (\varphi(s), \psi(s))$$

となる．定点sの近くに動点σをとり，点$\chi(s)$と$\chi(\sigma)$を通る直線，つまり曲線の割線を引く．$\hat{\alpha}$で点$\chi(s)$から$\chi(\sigma)$へ向かうベクトルと横軸のなす角を表す．このとき明らかに

$$\cos\hat{\alpha} = \hat{a}\frac{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}{\sigma - s}, \quad \sin\hat{\alpha} = \hat{a}\frac{\psi(\sigma) - \psi(s)}{\sigma - s}$$

が成り立つ．ただし，$\hat{a}$は正の係数である．この等式で$\sigma \to s$のときの極限をとると，$\hat{\alpha}$の極限をα，$\hat{a}$の極限をaとすれば，等式

$$\cos\alpha = a\varphi'(s), \quad \sin\alpha = a\psi'(s)$$

が得られる．これと(18)とから$a = 1$となる．したがって

$$\cos\alpha = \varphi'(s), \quad \sin\alpha = \psi'(s) \tag{19}$$

が成り立つ．ゆえに，ベクトル

$$\chi'(s) = (\varphi'(s), \psi'(s))$$

の長さは1に等しい．すなわち

$$|\chi'(s)| = 1$$

また，$\sigma \to s$のとき割線は点sにおける曲線の接線に近づくから，ベクトル$\chi'(s)$は点sにおける曲線の単位接線ベクトルで，その向きはsの増加の方向である．さらに(19)から

$$\tan\alpha = \frac{\psi'(s)}{\varphi'(s)} \tag{20}$$

となる．つぎに(18)をsについて微分すると

$$\varphi'(s)\varphi''(s) + \psi'(s)\psi''(s) = 0$$

が得られる．これからベクトル$\chi'(s)$と$\chi''(s)$は直交していることがわかる

(まえがき，(*9*)，(*10*)参照)．ベクトル $\chi''(s)$ が横軸となす角を β で表すと

$$\varphi''(s) = b\cos\beta, \quad \psi''(s) = b\sin\beta \tag{21}$$

である．ただし，$b = |\chi''(s)|$ は正である．角 α および β は具体的な式の形で表されていないが，これらはパラメータ s の関数である．$\dfrac{d\alpha}{ds}$ を計算してみよう．これはパラメータ s に関するベクトル χ' の回転の速さである．しかもこの量は曲線の曲がり具合いの緩急の度合いを表しているので，平面曲線の曲率とよばれている．まず(*20*)を s で微分すると

$$\frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\psi''(s)\varphi'(s) - \varphi''(s)\psi'(s)}{(\varphi'(s))^2}$$
$$= \frac{\psi''(s)\varphi'(s) - \varphi''(s)\psi'(s)}{\cos^2\alpha}$$

が得られる．この式から(*19*)と(*21*)を用いて

$$\frac{d\alpha}{ds} = b\sin(\beta - \alpha) \tag{22}$$

が得られる．$\chi'(s)$ と $\chi''(s)$ は直交しているから

$$\sin(\beta - \alpha) = \pm 1$$

である．したがって，(*22*)から

$$\frac{d\alpha}{ds} = b$$

または

$$\frac{d\alpha}{ds} = -b$$

となる．ゆえに

$$b = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

となる．ベクトル $\chi'(s)$ の回転の速さの絶対値は b に等しい．ベクトル $\chi'(s)$ の回転の向きが，時計の針の回転と反対の向きならば $\dfrac{d\alpha}{ds}$ は正であり，時計の針の回転と同じ向きならば $\dfrac{d\alpha}{ds}$ は負である．b を曲線の点 s における曲率という．

微分幾何学において曲率と並んでその逆数 $r = \dfrac{1}{b}$ が考察される．これを曲

線の点 s における**曲率半径**という．このように名づけられたのは次のことからわかる．曲線上に 3 点 $s_1 < s_2 < s_3$ を互いに近くとり，この 3 点 $\chi(s_1)$, $\chi(s_2)$, $\chi(s_3)$ を通る円を描き，その円の半径を $\tilde{r}$ とする．このとき，s_1, s_2, s_3 が s に近づくならば，半径 $\tilde{r}$ は $r = \dfrac{1}{b}$ に近づく．幾何学的に興味深いこの事実の証明はむずかしくはない．読者の方々に自分で証明してみることをお勧めする．

4章
解　析　関　数

この章では解析関数の理論の古典的な結果について述べる．まず最初に，複素変数の複素数値関数に対して複素数平面上に描かれた曲線上の積分を定義する．つぎに，微分係数をもつ複素変数の複素数値関数の閉曲線上の積分は0に等しいというコーシーの定理について特別の場合を証明する．この定理からコーシーの積分公式を導き，さらに，複素変数の関数の孤立特異点におけるローラン級数展開について述べる．章の終りのところで，真性特異点の近くにおける解析関数のふるまいについて述べる．すなわち次のことを証明する．解析関数は真性特異点の近くで，適当な方法で真性特異点へ収束する変数値の点列を選べば，任意の極限に収束する．

20.　複素関数の積分法

17節で実変数の連続関数は積分可能であること，すなわち積分をもつことが証明された．ここで，積分可能性に関する同じ問題を複素変数の関数に対しても提起するのは自然なことである．ところが，複素変数の関数の積分可能性に対して関数の連続性だけでは不十分である．関数が微分可能であること，すなわち各点で微分係数をもつことを仮定する必要がある．しかし実はこのような控え目な条件が満たされるだけで，複素変数の関数は各点でテイラー級数に展開される．すなわち関数は変数の各値 z_0 において正の収束半径をもつべき級数に展開される．このような関数は**解析的**であるといわれている．解析関数は数学でたいへん重要な役割を果たしている．解析関数の研究は数学の中で大きな専門領域を形成している．微分可能な複素変数の関数はすべて解析的であ

ることの証明はたいへんむずかしい．その証明はいくつかの段階を踏んで行われる．それでまず準備から始める．

開集合　複素変数の解析関数は変数の各値 z_0 においてべき級数に展開されるから，したがって解析関数は不等式

$$|z-z_0|<r \tag{1}$$

を満たすすべての変数の値に対して定まるから，解析関数の変数の許容値の集合はつぎに述べる開集合でなければならない．ただし，r は正の数である．複素数平面上の集合 G が開集合であるというのは G の任意の点 z_0 に対して条件(*1*)を満たすすべての点が G に含まれることである．ただし，r は点 z_0 に依存する十分小さい正の数である．以下では考察される複素変数 z の関数 $f(z)$ はいつも複素数平面上の1つの開集合 G の上で与えられているとする．

さてここで，複素数平面上の開集合 G について以下の複素変数の関数の研究に必要となる簡単な性質をいくつか述べておこう．

いま，複素数平面上の有界閉集合 F と正の数 r が与えられたとする．F_r で，複素数平面上の点 ζ で条件

$$|\zeta-z|\leqq r \tag{2}$$

を満たす F の点 z が存在するようなもの全体の集合を表す．

このとき，次の命題が成り立つ．集合 F_r は有界閉集合である．さらに，集合 F が開集合 G に含まれているならば，F_r が G に完全に含まれてしまうようなある小さい正の数 r が存在する．

この命題を証明するために，より正確には命題の2つの部分を証明するために，まず2組の点列

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots \tag{3}$$

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_n,\ \cdots \tag{4}$$

と有界な正の数の列

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots \tag{5}$$

をとる．複素数列(*3*)については，項はすべて F に属していると仮定し，複素数列(*4*)については，項は条件

$$|\zeta_n-z_n|\leqq r_n,\quad n=1,\ 2,\ \cdots \tag{6}$$

を満たすと仮定する．まず最初に，自然数列

$$1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

から部分列

$$n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k,\ \cdots \tag{7}$$

を選び出し，(7)の番号をもった数列(3)と(4)は，それぞれ(3)と(4)の収束する部分列になるようにできることを証明しよう．数列(3)については，(3)の各項は有界閉集合 F に属しているから，すでに証明されたように（4節参照），(3)から収束する部分列を選び出すことができる．部分列を改めて新しい記号で表すのはやめて，(3)自体が F の点 z_0 に収束すると見なすことにしよう．正の数の列(5)は有界であるから，ある大きな数 ρ が存在して，(5)のすべての項は $\rho/2$ より小さい．このことと，数列(3)が z_0 に収束することから，容易にわかるように数列(4)のある番号から後のすべての項は条件

$$|\zeta_n - z_0| \leqq \rho \tag{8}$$

を満たす．さて，

$$|\zeta - z_0| \leqq \rho$$

を満たす点 ζ 全体の集合は有界閉集合であるから，(8)から数列(4)は収束する部分列をもつことがわかる．このために記号を書き換えることはしないことにして，(4)自体がある ζ_0 に収束すると見なす．このようにして，2つの複素数列(3)と(4)および有界な正の数の列(5)に対して，自然数列の部分列(7)を選び，(7)を番号にもつ(3)と(4)の部分列は収束するようにできた．このために記号を書き換えないで，数列(3)と(4)はそれぞれ z_0 と ζ_0 に収束すると見なすことにしよう．

さて，集合 F_r が有界閉集合であることを証明するために，数列(5)のすべての項は r に等しいと仮定する．そうすると(4)は F_r に属する項からなる数列となる．ところがいま証明したように，この数列から F_r の点に収束する部分列を選び出すことができる．これで F_r は有界閉集合であることが証明された．

命題の第2の部分，すなわち十分小さい r をとると集合 F_r は G に含まれるという部分の証明は矛盾を導く背理法で行う．いま，正の数の列(5)が0に収束し，どの F_{r_n} の中にも G に含まれない点 ζ_n が存在すると仮定しよう．点 ζ_n は F_{r_n} に属しているから，F の中に不等式

$$|\zeta_n - z_n| \leqq r_n \tag{9}$$

を満たす点 z_n が存在する．このようにして，数列(3)と(4)および0に収束

する数列(5)が得られた．さて，数列(3)は点 z_0 に収束するとしよう．このとき(9)と，(5)が0へ収束することから，(4)もまた点 z_0 に収束しなければならないことがわかる．ところが，点 z_0 が F に属し，したがって開集合 G に属するから，正の数 r が存在して

$$|\zeta - z_0| < r$$

ならば ζ は G に属する．したがって点 z_0 に収束する数列(4)のある番号から後の項は集合 G に含まれる．これははじめに立てた仮定と矛盾する．これで命題の第2の部分が証明された．

さて以下で有界閉集合 F の役割を担うのは，次の方程式をパラメータ表示としてもつ曲線 K 上の点全体の集合である．

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{10}$$

ただし，$\varphi(t)$ と $\psi(t)$ は区間

$$\mu \leqq t \leqq \nu \tag{11}$$

上の区分的に滑らかな関数である．

ところでいま，複素数平面上で考察しているのであるから，方程式の対(10)を1つの方程式にまとめて次の形の式で書き表すのが自然である．

$$z = z(t) = \varphi(t) + i\psi(t) \tag{12}$$

19節の場合と同じように，方程式の対(10)または同じことであるが，方程式(12)は区分的に滑らかな曲線を表していると考える．曲線 K 上の点全体の集合が有界閉集合であることは実変数 t の許容値全体の集合（(11)参照）は有界閉集合で，関数 $z(t)$ が連続なことからわかる．また以下で，曲線 K を，t が μ から ν まで増加するとき一定の向きに進んでいく点 $z(t)$ が描く経路として考察する．この意味で経路には向きが付いている．パラメータ t の代わりに別のパラメータ $\hat{t}$ を導入し，しかも t と $\hat{t}$ が互いに逆関数の関係になっているとする．すなわち

$$t = t(\hat{t}), \quad \hat{t} = \hat{t}(t) \tag{13}$$

したがって恒等式

$$t = t(\hat{t}(t)), \quad \hat{t} = \hat{t}(t(\hat{t}))$$

が成り立つ．(12)で t の代わりに $t(\hat{t})$ とおくと方程式

$$z = z(t(\hat{t})) = \hat{z}(\hat{t}) \tag{14}$$

が得られる．これはまた，方程式(12)によって与えられている曲線 K それ自

体を与えている．さらに，導関数 $t'(\hat{t})$ は曲線 K 全体において連続でかつ 0 にならないと仮定する．したがって $t'(\hat{t})$ は定符号である．このことから，導関数 $\hat{t}'(t)$ は連続で 0 にならないし，$t'(\hat{t})$ と同じ符号をもつことがわかる(11 節，(*26*)参照)．導関数 $t'(\hat{t})$ と $\hat{t}'(t)$ が正である場合，曲線 K が t と $\hat{t}$ でパラメータ化されるとき（(*12*)と(*14*)参照)，K は同じ向きに描かれる．導関数 $t'(\hat{t})$ と $\hat{t}'(t)$ が負であるならば，t と $\hat{t}$ は反対向きにパラメータ化されていると考える．この場合，t でパラメータ化された経路を K で表すならば，$\hat{t}$ でパラメータ化された経路を $-K$ で表す．このように扱うのは自然である．なぜなら t が増加するときに描かれる曲線 K の向きに対して，$\hat{t}$ が増加するとき曲線 K はこれと反対の向きに描かれるからである．

経路上の関数の積分法　開集合 G 上で与えられた複素変数 z の連続関数 $f(z)$ と，開集合 G に完全に含まれている方程式(*12*)で与えられた経路 K について考える．関数 $f(z)$ の経路 K 上の積分を $\int_K f(\zeta)d\zeta$ で表し，次の式で定義する．

$$\int_K f(\zeta)d\zeta = \int_\mu^\nu f(z(\tau))z'(\tau)d\tau \tag{15}$$

さてまず，関数の経路上の積分は経路のパラメータ化にどの程度依存するかを明らかにしよう．これについて以下のことが示される．経路の 2 つのパラメータ化が経路に同じ向きを与えるならば，この 2 つのパラメータ化による経路上の積分は互いに相等しい．2 つのパラメータ化による経路の向きが反対になるならば，すなわち経路 K に対して経路が $-K$ になるならば積分は符号が変わる．このように，積分は経路の向きにだけ依存し，経路を与える方程式には依存しない．また，経路 K の向きと反対の向きの経路をとるならば，すなわち経路 $-K$ をとるならば，積分の符号が変わる．したがって，式

$$\int_K f(\zeta)d\zeta$$

において，K は方程式(*12*)で与えられた曲線図形ではなくて，一定の向きに点 z が移動して描く幾何学的な経路であり，しかも経路の表し方つまりパラメータ化は特別な役割を果たしてはいない．経路の向きを換えると，経路 K の代わりに経路 $-K$ が得られ，これらの経路に対する積分の関係は次の式で与えられる．

$$\int_{-K} f(\zeta)d\zeta = -\int_K f(\zeta)d\zeta \tag{16}$$

つぎに，上で述べた命題を証明しよう．そのためパラメータ t と並んで(*13*)の関係で結ばれているパラメータ $\hat{t}$ を考察しよう．このとき(*12*)で t を変換すると(*14*)になる．さらに

$$\hat{\mu} = \hat{t}(\mu), \quad \hat{\nu} = \hat{t}(\nu)$$

とおく．積分(*15*)で積分変数 τ を積分変数 $\hat{\tau}$ に $\tau = t(\hat{\tau})$ とおいて変換すると，置換積分法（14 節参照）によって

$$\begin{aligned}\int_K f(\zeta)d\zeta &= \int_\mu^\nu f(z(\tau))z'(\tau)d\tau \\ &= \int_{\hat{t}(\mu)}^{\hat{t}(\nu)} f(z(t(\hat{\tau})))z'(t(\hat{\tau}))t'(\hat{\tau})d\hat{\tau} \\ &= \int_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} f(\hat{z}(\hat{\tau}))z'(t(\hat{\tau}))t'(\hat{\tau})d\hat{\tau} \\ &= \int_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} f(\hat{z}(\hat{\tau}))\hat{z}'(\hat{\tau})d\hat{\tau}\end{aligned}$$

が得られる（(*14*)参照）．したがって

$$\int_\mu^\nu f(z(\tau))z'(\tau)d\tau = \int_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} f(\hat{z}(\hat{\tau}))\hat{z}'(\hat{\tau})d\hat{\tau} \tag{17}$$

が得られる．

さて，経路上の積分の定義(*15*)において，積分の下端 μ は積分の上端 ν よりも小さい（$\mu < \nu$，(*11*)参照）と仮定したことを思い出そう．したがって不等式 $\mu < \nu$ は経路上の積分の定義(*15*)において本質的な要素である．

ここで $\hat{t}'(t)$ が正ならば，不等式 $\mu < \nu$ から不等式 $\hat{\mu} < \hat{\nu}$ が得られる．したがってこの場合，等式(*17*)は，同じ向きにパラメータ化された経路上の積分(*15*)は同じ値をもつことを示している．

一方，$\hat{t}'(t)$ が負の場合，不等式 $\mu < \nu$ から不等式 $\hat{\mu} > \hat{\nu}$ が得られる．したがってこの場合，等式(*17*)の右辺はこの経路上の積分でない．なぜなら，積分の下端が積分の上端より大きく，これは積分の定義の際の仮定を満たしていないからである．等式(*17*)の右辺が意味することを理解するために，積分

$$\int_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} f(\hat{z}(\hat{\tau}))\hat{z}'(\hat{\tau})d\hat{\tau} \tag{18}$$

を考察しよう．経路上の積分の定義によって，(*18*)は積分

$$\int_{-K} f(\zeta)d\zeta$$

を与えている．ところが

$$\int_{\hat{\nu}}^{\hat{\mu}} f(\hat{z}(\hat{\tau}))\hat{z}'(\hat{\tau})d\hat{\tau} = -\int_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} f(\hat{z}(\hat{\tau}))\hat{z}'(\hat{\tau})d\hat{\tau} \tag{19}$$

であるから，(*19*)と(*17*)から(*16*)が得られる．このようにして経路上の積分の，経路のパラメータ化に対する依存の問題が完全に解明され，目的の命題がこれで証明された．

いま，2つの経路 K_1 と K_2 があり，経路 K_2 の始点が経路 K_1 の終点と一致しているならば，経路 K_1 から始まって経路 K_2 に進む新しい1つの経路 K が得られる．しかも，K_1 と K_2 のパラメータ表示を1つに統一したパラメータ表示を K に与えることができる．したがって17節の公式(*56*)によって

$$\int_K f(\zeta)d\zeta = \int_{K_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{K_2} f(\zeta)d\zeta \tag{20}$$

が成り立つ．

曲線弧の長さによるパラメータ化　パラメータ t として点 $z(0)$ から点 $z(s)$ までの経路の長さ s を用いるならば（19節，例参照），

$$|z'(s)| = 1 \tag{21}$$

である．実際

$$|z'(s)| = |\varphi'(s) + i\psi'(s)| = +\sqrt{(\varphi'(s))^2 + (\psi'(s))^2} = 1$$

となる（19節，(*18*)参照）．さて，パラメータとしてこの s を用いると，積分(*15*)の絶対値に対する使いやすい評価を与えることができる．すなわち，経路 K 上のすべての点で評価

$$|f(z(s))| \leqq m$$

が成り立つならば，17節の(*58*)によって

$$\left|\int_K f(\zeta)d\zeta\right| = \left|\int_\mu^\nu f(z(s))z'(s)ds\right| \leqq m(\nu - \mu) \tag{22}$$

が成り立つ．ここに，$\nu - \mu$ は積分の経路全体の長さである．

経路 *K* 上の積分と *K* 上に頂点をもつ折線 *L* 上の積分の比較　パラメータ t の区間 $[\mu\nu]$ の分割を

$$T = (t_0,\ t_1,\ \cdots,\ t_k), \quad t_0 = \mu,\ t_k = \nu$$

とし，これを用いて積分の経路 K を部分経路に分割しよう．点 $z(t_{j-1})$ と $z(t_j)$

を線分 L_j で結び，$L = L(T)$ で線分 L_1，L_2，…，L_k を順につないでできる経路を表そう．そうすると，折線経路 L は曲線経路 K 上に頂点をもつ．さて，ここでの問題は K 上の積分と L 上の積分を比較することにある．すなわち次の等式を証明する．

$$\int_K f(\zeta)d\zeta = \lim_{\delta(T)\to 0}\int_L f(\zeta)d\zeta \tag{23}$$

したがって，曲線経路 K 上の積分は折線経路 L 上の積分で任意の精度で置き換えることができる．以下でこの結果は非常に重要な役割を果たすことになる．

さて，線分経路 L_j に，t が t_{j-1} から t_j まで変わるとき L_j が $z^*(t)$ で描かれるように，自然な線形パラメータ表示を与えよう．すなわち

$$z^*(t) = \frac{z(t_{j-1})(t_j - t) + z(t_j)(t - t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \tag{24}$$

$$t_{j-1} \leqq t \leqq t_j$$

とおくことにしよう．すぐ確かめられるように，t が t_{j-1} から t_j まで変わるとき，点 $z^*(t)$ によって線分 L_j が描かれる．したがって，t が μ から ν まで変わるとき，点 $z^*(t)$ によって折線経路 L 全体が描かれる．これで $L = L(T)$ はパラメータ化された．

積分(15)の定義の式の中に関数 $z'(t)$ が入っている．したがってまず最初に，t_{j-1} から t_j の間における $z^{*\prime}(t)$ を計算しよう．$z^*(t)$ の定義の式(24)によって次のようになる．

$$z^{*\prime}(t) = \frac{z(t_j) - z(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = \frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} + i\,\frac{\psi(t_j) - \psi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}$$

さらに，ラグランジュの公式（12節，(20)参照）によって

$$\frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = \varphi'(\alpha_j)$$

$$\frac{\psi(t_j) - \psi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = \psi'(\beta_j)$$

となる．ただし，α_j と β_j は区間 $[t_{j-1}t_j]$ に属する．したがって，t_{j-1} から t_j の間で

$$z'(t) - z^{*\prime}(t) = (\varphi'(t) - \varphi'(\alpha_j)) + i(\psi(t) - \psi'(\beta_j))$$

となる．ただし，t，α_j，β_j は区間 $[t_{j-1}t_j]$ に属する．一方，$z'(t)$ は区分的連続であるから区分的に一様連続である．したがって，$\mu \leqq t \leqq \nu$ のすべての t

に対して

$$|z'(t) - z^{*\prime}(t)| \leqq \rho(T) \tag{25}$$

$$\lim_{\delta(T)\to 0}\rho(T) = 0$$

となる.

ここで，$\rho(T)$ は分割 T に依存する実数である．また

$$z(t) - z^*(t) = \int_\mu^t (z'(\tau) - z^{*\prime}(\tau))d\tau$$

であるから，17 節の(58)を用いて(25)から

$$|z(t) - z^*(t)| \leqq \rho(T)(\nu - \mu) \tag{26}$$

が得られる．前に述べたように，F で経路 K に属する点全体の集合を表すと，適当な小さい r が存在して，F_r は開集合 G に含まれる．さらに，十分細かいすべての分割 T に対して，経路 $L(T)$ は F_r の中を通るようにできる．実際このためには

$$\delta(T) \leqq \delta$$

とすればよい．ただし δ は十分に小さい正の数である．関数 $f(z)$ は有界閉集合 F_r 上で一様連続であり，経路 K も L も F_r の中を通るから，不等式(26)より

$$|f(z(t)) - f(z^*(t))| < \rho_1(T) \tag{27}$$

$$\lim_{\delta(T)\to 0}\rho_1(T) = 0$$

が得られる．ここで，$\rho_1(T)$ は分割 T に依存する正の数である．したがって，不等式(25)と(27)から不等式

$$|f(z(t))z'(t) - f(z^*(t))z^{*\prime}(t)| \leqq \rho_2(T) \tag{28}$$

$$\lim_{\delta(T)\to 0}\rho_2(T) = 0$$

が得られる．ここで，$\rho_2(T)$ は分割 T に依存する正の数である．実際

$$\begin{aligned}
&|f(z(t))z'(t) - f(z^*(t))z^{*\prime}(t)| \\
&\qquad = |(f(z(t))z'(t) - f(z(t))z^{*\prime}(t)) \\
&\qquad\qquad - (f(z^*(t))z^{*\prime}(t) - f(z(t))z^{*\prime}(t))| \\
&\qquad \leqq |f(z(t))(z'(t) - z^{*\prime}(t))| \\
&\qquad\qquad + |(f(z^*(t)) - f(z(t)))z^{*\prime}(t)| \\
&\qquad \leqq m\rho(T) + \rho_1(T)\cdot m
\end{aligned}$$

となる．ただし，m は $f(z(t))$ と $z^{*\prime}(t)$ の絶対値の評価である．すなわち

$$|f(z(t))| \leqq m$$

$$|z^{*\prime}(t)| \leqq m$$

である．このような評価は存在する．なぜなら，$f(z(t))$ と $z^{*\prime}(t)$ は，$z'(t)$ が区分的連続なことによって有界になるからである．ゆえに，$\rho_2(T) = m(\rho(T) + \rho_1(T))$ とおけばよい．

さて，(28) から 17 節の (58) を用いて

$$\left| \int_K f(\zeta)d\zeta - \int_L f(\zeta)d\zeta \right| = \left| \int_\mu^\nu (f(z(\tau))z'(\tau) - f(z^*(\tau))z^{*\prime}(\tau))d\tau \right| \leqq \rho_2(T)(\nu - \mu) \quad (29)$$

が得られる．ゆえに，(29) と (28) から目的の等式 (23) が得られる．

例　等式 (23) の証明のときに，一様収束の概念を 2 回表に出さずに実質的に使った．しかしこの概念は以下では明確な形で使う必要がある．ここでこの概念の定義を述べておこう．

実変数または複素変数の実数値または複素数値関数の列

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots,\ f_n(z),\ \cdots \quad (30)$$

が関数 $f(z)$ に**一様収束**するというのは，任意の正の数 ε に対して適当な大きい番号 ν を選んで，$n > \nu$ ならば変数のすべての許容値 z に対して

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

が成り立つようにできることである．z が実変数 t ならば関数列 (30) の一様収束性から容易に

$$\lim_{n\to\infty}\int_\mu^t f_n(\tau)d\tau = \int_\mu^t f(\tau)d\tau$$

が得られる．なぜなら

$$\left| \int_\mu^t f_n(\tau)d\tau - \int_\mu^t f(\tau)d\tau \right| = \left| \int_\mu^t (f_n(\tau) - f(\tau))d\tau \right| \leqq |t - \mu|\varepsilon$$

となるからである．ところで，等式 (23) の証明の中で不等式 (26) と (29) を証明するとき積分を評価するのに，番号 n の代わりに分割 T として同じような方法が用いられた．

最後に，数列と級数の関係（5 節，(2) 参照）を考慮すると，一様収束級数

の概念はどのように定義するのか，また一様収束級数は項別積分可能なことをどのようにして証明するか，これらは明らかなことであろう．

21．コーシーの定理

コーシーの定理は解析関数の理論の中心的な定理である．その一般的な定式化とあまり衒学的にならない証明を例で与えることにしよう．この節の主要な部分では，コーシーの定理のとくに重要な特別の場合だけを扱うことにする．

まず最初に，20 節で導入された用語について，方程式

$$z = z(t) = \varphi(t) + i\psi(t) \tag{1}$$

$$\mu \leqq t \leqq \nu$$

は，t が μ から ν まで増加するときに描かれる複素数平面上の 1 つの経路 K を表していることを思い出そう．ただし，$\varphi(t)$ と $\psi(t)$ はパラメータ t の区分的に滑らかな実数値連続関数である．さて，この経路が**閉経路**であるというのは，経路の始点と終点が一致すること，すなわち

$$z(\mu) = z(\nu) \tag{2}$$

が成り立つことである．ここではこのように定義された経路 K を与えられた微分可能な関数 $f(z)$ の積分の経路にとる．そしてこの K に対して定まる積分

$$\int_K f(\zeta)d\zeta$$

を考察する（20 節，(*15*)参照）．つぎにまずいくつかの予備的な結果を証明しよう．

開集合 G 上で与えられた関数 $f(z)$ は積分可能であるとしよう．すなわち方程式

$$h'(z) = f(z) \tag{3}$$

を満たす原始関数 $h(z)$ が存在するとしよう．さらに，$h(z)$ は G 全体で定まり，そこで 1 価であるとする（この最後の条件はとくに強調しておかなければならない．なぜなら，ふつう関数というときは 1 価関数を考えているが，実際はたとえば $\log z$ のように 1 価でない関数にすでに出会っているからである．）．このとき，つまり条件(*3*)が成り立つならば，$f(z)$ の経路 K 上の積分は容易に計算することができる．すなわち

$$\int_K f(\zeta)d\zeta = h(z(\nu)) - h(z(\mu)) \tag{4}$$

となる．

等式(4)を証明しよう．合成関数の微分法の規則によって

$$\frac{dh(z(t))}{dt} = h'(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t) \tag{5}$$

が成り立つ．したがって

$$\int_K f(\zeta)d\zeta = \int_\mu^\nu f(z(\tau))z'(\tau)d\tau = h(z(\nu)) - h(z(\mu))$$

が成り立つ（14節，(20)，(21)参照）．これで，等式(4)が証明された．

特別の場合，経路 K が閉経路のとき（(2)参照），

$$\int_K f(\zeta)d\zeta = 0$$

が成り立つ．

つぎにコーシーの定理の特別の場合を証明しよう．しかし実際はこれは定理の核心をなしている場合である．

三角形の場合のコーシーの定理　開集合 G に三角形 abc が含まれていると仮定する．これは，三角形 abc の境界 T_0 だけが G に含まれているのではなく，T_0 および三角形 abc の内部の点全体からなる三角形，つまり三角形 abc の周と内部を含めた三角形 $\hat{T}_0$ が G に含まれていることを意味している．また同じ記号 T_0 で，点 z が三角形 abc の各辺を順に，すなわち辺 ab，bc，ca を順に移動して描く経路を表す．しかもこの経路は時計の針の回転の向きと反対の向きに描かれるものとする．このとき，関数 $f(z)$ が開集合 G のすべての点 z で微分係数をもつならば，$f(z)$ の T_0 上の積分は0である．式の形で書き表すと

$$\int_{T_0} f(\zeta)d\zeta = 0 \tag{6}$$

となる．さて，この等式(6)を矛盾に導く背理法で証明しよう．すなわち

$$\left|\int_{T_0} f(\zeta)d\zeta\right| \geqq \alpha, \quad \alpha > 0 \tag{7}$$

と仮定しよう．辺 ab，bc，ca の中点をそれぞれ c_1，a_1，b_1 で表す．線分 a_1b_1，b_1c_1，c_1a_1 によって与えられた三角形 $\hat{T}_0$ は4つの三角形に分割され，これらの三角形の境界を時計の針の回転の向きと反対の向きに描くことによっ

てできる経路をそれぞれ

$$T_1^1,\quad T_1^2,\quad T_1^3,\quad T_1^4 \tag{8}$$

で表す．(8)の三角形のそれぞれは三角形 T_0 と相似で，相似比は $\dfrac{1}{2}$ である．

また

$$\int_{T_0} f(\zeta)d\zeta = \sum_{j=1}^{4}\int_{T_1{}^j} f(\zeta)d\zeta \tag{9}$$

が成り立つ．この等式が成り立つのは，各線分 a_1b_1，b_1c_1，c_1a_1 はそれぞれ(8)の経路の中のちょうど 2 つの経路に含まれ，これら 2 つの経路の互いに反対向きの部分経路になっているからである．不等式(7)と等式(9)から，(8)の三角形の中に次の不等式を満たす三角形が存在する．それを T_1 とする．

$$\left|\int_{T_1} f(\zeta)d\zeta\right| \geqq \frac{\alpha}{4}$$

三角形 T_1 を，三角形 T_0 に対して行ったと全く同じ方法で 4 つに分割すると，次の不等式を満たす三角形 T_2 が存在する．

$$\left|\int_{T_2} f(\zeta)d\zeta\right| \geqq \frac{\alpha}{4^2}$$

この三角形 T_2 は最初の三角形 T_0 と相似で，相似比は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ である．この過程を続けると次のような三角形の列が得られる．

$$T_0,\quad T_1,\quad \cdots,\quad T_n,\quad \cdots$$

ただし，三角形 T_n は三角形 T_0 と相似で，相似比は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ であり，しかも不等式

$$\left|\int_{T_n} f(\zeta)d\zeta\right| \geqq \frac{\alpha}{4^n} \tag{10}$$

を満たす．$\widehat{T}_n$ で，三角形 T_n の周と内部を含めた三角形，つまり経路 T_n 上の点と T_n で囲まれた内部の点全部からなる三角形を表す．明らかに，$n=1, 2, \cdots$ に対して，三角形 $\widehat{T}_{n+1}$ は三角形 $\widehat{T}_n$ に完全に含まれる．さて今度は，三角形

$$\widehat{T}_0,\quad \widehat{T}_1,\quad \cdots,\quad \widehat{T}_n,\quad \cdots \tag{11}$$

のすべてに属する点 $\hat{z}$ が存在することを証明しよう．そのため，まず三角形 T_0 の 3 辺の長さの最大値を l で表す．そうすると，三角形 T_n の辺の長さの

最大値は $\dfrac{l}{2^n}$ に等しい．したがって，三角形 $\hat{T}_n$ の中の2点間の距離は $\dfrac{l}{2^n}$ を超えない．さらに，$n=0,\ 1,\ \cdots$ に対して三角形 $\hat{T}_n$ から点 z_n を選ぶ．このとき，次のことを証明する．すなわち，点列

$$z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots \tag{12}$$

はコーシー列で，その極限は(11)のすべての三角形に属する．実際，ν を任意の自然数とし，$p,\ q$ を ν より大きい自然数とする．このとき，z_p と z_q は三角形 $\hat{T}_\nu$ に属する．したがって，z_p と z_q の距離は $\dfrac{l}{2^\nu}$ を超えない．これは点列(12)はコーシー列であることを意味している．

また，(12)の番号 ν から後のすべての点は $\hat{T}_\nu$ に属しており，$\hat{T}_\nu$ は閉集合だから極限も $\hat{T}_\nu$ に属する．ゆえに，点 $\hat{z}$ は(11)のすべての三角形に属する．

さて，関数 $f(z)$ の微分係数は開集合 G のすべての点で存在するから，点 $\hat{z}$ においても存在する．これは極限

$$\lim_{z\to\hat{z}} \frac{f(z)-f(\hat{z})}{z-\hat{z}} = f'(\hat{z})$$

が存在することを意味している．この式は次の形に書き換えることができる．

$$\frac{f(z)-f(\hat{z})}{z-\hat{z}} - f'(\hat{z}) = \gamma(z) \tag{13}$$

ただし，$|\gamma(z)| \leqq \gamma$ で，γ は $\lim\limits_{z\to\hat{z}} \gamma = 0$ を満たす実数である．

等式(13)はさらに次の形に書き換えることができる．

$$f(z) = f(\hat{z}) + f'(\hat{z})(z-\hat{z}) + \gamma(z)(z-\hat{z}) \tag{14}$$

このような形に書き換えられた関数 $f(z)$ を経路 T_n 上で積分しよう．等式(14)の右辺のはじめの2項の和は積分可能である．なぜなら

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(f(\hat{z})(z-\hat{z}) + \frac{f'(\hat{z})(z-\hat{z})^2}{2}\right) = f(\hat{z}) + f'(\hat{z})(z-\hat{z})$$

となるからである．したがって(14)の右辺のはじめの2項の和の経路 T_n 上の積分は0である．したがって，後は最後の項，つまり

$$\gamma(z)(z-\hat{z})$$

だけを積分すればよい．さて，この関数の経路 T_n 上の積分を20節の(22)を用いて評価しよう．まず，積分の経路の長さは $\dfrac{3l}{2^n}$ を超えない．つぎに，点 z

も $\hat{z}$ も $\hat{T}_n$ に属しているから

$$|z-\hat{z}| \leqq \frac{l}{2^n}$$

である．したがって，

$$\left|\int_{T_n}\gamma(z)(z-\hat{z})dz\right| \leqq \frac{3l^2}{4^n}\gamma$$

が成り立つ．しかも

$$\lim_{n\to\infty}\gamma = 0 \tag{15}$$

である．したがって

$$\left|\int_{T_n}f(\zeta)d\zeta\right| \leqq \frac{3l^2}{4^n}\gamma \tag{16}$$

が得られる．不等式(*16*)と(*10*)は(*15*)によって互いに矛盾する．これで矛盾が導かれた．ゆえに，等式(*6*)が成り立つ．

なお，等式(*6*)の証明のとき，与えられた関数 $f(z)$ の微分係数 $f'(z)$ の存在だけが使われ，導関数の連続性，つまり $f'(z)$ の連続性は使われていないことを注意しておく．

さて，等式(*6*)から系を2つ導こう．それらは2つともコーシーの定理の特別の場合である．

系1 開集合 G 上で微分可能な関数 $f(z)$ が与えられており，G の中に方程式(*1*)と条件(*2*)によって定められる閉経路 K が与えられているとする．開集合 G の中に1点 a をとり，点 a から経路 K 上の点 $z(t)$ まで引かれた線分 $[az(t)]$ は完全に G に含まれていると仮定する．このとき，$f(z)$ の K 上の積分は0である．すなわち，式で書き表すと

$$\int_K f(\zeta)d\zeta = 0 \tag{17}$$

である．

これを証明するために，まず与えられた経路 K 上に頂点をもつ折線 L を，分割

$$T=(t_0,\ t_1,\ \cdots,\ t_k),\quad t_0=\mu,\ t_k=\nu$$

を用いて，前節で述べたやり方でつくる．分割 T が十分細かい，つまり $\delta(T)$ が小さいならば，折線経路 L は曲線経路 K の非常に近くを通る．このことから，点 a から L 上の点 $z^*(t)$ に引いた線分はすべて G に含まれること

がわかる．したがって，線分

$$[az(t_{j-1})],\quad [z(t_{j-1})z(t_j)],\quad [z(t_j)a]$$

からつくられる三角形経路 K_j によって，開集合 G に完全に含まれる三角形 $\widehat{K}_j$ ができる．したがって，各三角形 K_j に対して(*6*)が成り立つ．すなわち式で書くと

$$\int_{K_j} f(\zeta)d\zeta = 0 \tag{18}$$

となる．この等式(*18*)を j について 1 から k まで加えると

$$\sum_{j=1}^{k}\int_{K_j} f(\zeta)d\zeta = 0 \tag{19}$$

が得られる．各線分 $[az(t_j)]$ は 2 つの隣り合った三角形 K_j と K_{j+1} を通り，これらの三角形上で積分するとき，線分の向きは逆になるから，(*19*)の積分の和においてこれらの線分上の積分は互いに消し合う．K は閉経路であるから，点 a から点 $z(t_0)=z(t_k)$ に引いた線分についても全く同じことがいえる．したがって(*19*)の和の計算の結果，経路 L 上の積分だけが得られる．つまり次のように書き表すことができる．

$$\int_L f(\zeta)d\zeta = 0$$

一方，前節で証明された等式（20 節，(*23*)参照）によって

$$\int_K f(\zeta)d\zeta = \lim_{\delta(T)\to 0}\int_L f(\zeta)d\zeta$$

が成り立つ．ゆえに，等式(*17*)が証明された．

明らかに，方程式(*1*)と条件(*2*)で与えられた閉経路 K はその上の任意の点から描き始めることができる．しかもそれによって積分の値は変わることはない．したがって閉経路上で積分するとき，閉経路の始点を指定する必要はなく，閉経路自体を指定することだけが必要なのである．

とくに，K が円で，周とともに内部も開集合 G に含まれている場合，a として円の中心の点をとればよいから

$$\int_K f(\zeta)d\zeta = 0 \tag{20}$$

が得られる．

系 2　開集合 G 上で微分可能な関数 $f(z)$ が与えられており，G 上には点 o_2 を中心とする同心円 K_1 と K_2 があり，K_1 は K_2 より大きいとする．さらに，

2つの円 K_1 と K_2 の間の円環の中に点 o_3 を中心とする円 K_3 があり，K_3 の内部の点はすべてこの円環に含まれていると仮定する．また，円 K_1 上の点も内部の点も，たかだか o_2 と o_3 を除いて，すべて開集合 G に含まれているものとする．それから $f(z)$ の積分の経路 K_1，K_2，K_3 の向きはどれも時計の針の回転の向きと反対であるとする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\int_{K_1} f(\zeta)d\zeta = \int_{K_2} f(\zeta)d\zeta + \int_{K_3} f(\zeta)d\zeta \qquad (21)$$

等式(*21*)を証明するために図を利用しよう（図 14）．図を書くため便宜上点 o_2 と o_3 を通る直線 P は水平線とし，点 o_2 は o_3 の左にとる．このとり方は複素数平面上の座標軸の位置とは無関係である．説明の都合上図をこのように書いただけである．さて，直線 P は3つの円 K_j をそれぞれ半分に分割する．上側の部分を K_j'，下側の部分を K_j'' とする．また，円 K_j のそれぞれは直線 P と2点で交わる．右側の点を b_j，左側の点を c_j とする．つぎに円 K_1 と2つの円 K_2 および K_3 とで囲まれた開集合 G の部分集合を R で表す．この R もまた直線 P によって2つに分割される．上側の部分を R'，下側の部分を R'' とする．R' の境界からできている，向きが時計の針の回転の向きと反対の閉

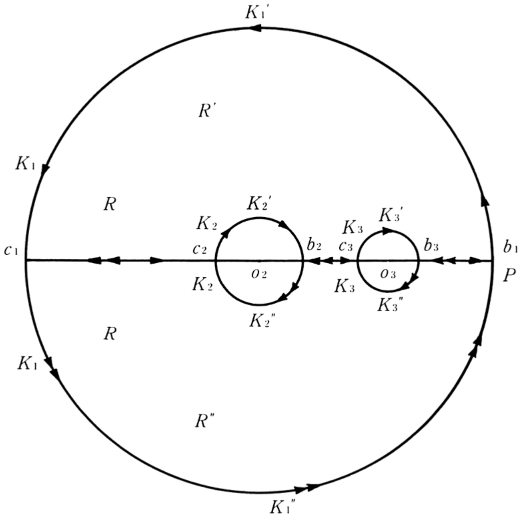


図14

経路を C' で表し，R'' の境界からできている，向きが時計の針の回転の向きと反対の閉経路を C'' で表す．a' を R' の中の1点とし，a'' を R'' の中の1点とする．a' と C' の任意の点と結ぶ線分は明らかに開集合 G に含まれる．同じように a'' から C'' の点まで引いた線分はすべて開集合 G に含まれる．したがって系1によって次の2つの等式が成り立つ．

$$\int_{C'} f(\zeta)d\zeta = 0 \tag{22}$$

$$\int_{C''} f(\zeta)d\zeta = 0 \tag{23}$$

閉経路 C' は3つの半円と3つの線分から構成されている．この C' を，向きが時計の針の回転の向きと反対なことを考慮して次のように書き表す．

$$C' = (K_1',\ c_1c_2,\ -K_2',\ b_2c_3,\ -K_3',\ b_3b_1)$$

全く同じように，閉経路 C'' を次のように書き表す．

$$C'' = (K_1'',\ b_1b_3,\ -K_3'',\ c_3b_2,\ -K_2'',\ c_2c_1)$$

閉経路 C' と C'' に含まれる線分経路の向きは互いに反対であり，半円 K_1' と K_1'' の向きは時計の針の回転の向きと反対である．一方，半円 K_j' と $K_j''(j=2,3)$ の向きは時計の針の回転の向きと同じである．したがって，20節の(20)を考慮に入れて等式(22)と(23)を加えると

$$\int_{K_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{-K_2} f(\zeta)d\zeta + \int_{-K_3} f(\zeta)d\zeta = 0$$

が得られる．これから，20節の(16)を用いて等式(21)が得られる．

さて，r_j で円 $K_j(j=1,2,3)$ の半径を表す．等式(21)の中の3つの積分はどれも定義上はそれぞれの円の半径に依存するが，ほかの2つの円の半径には当然依存しない．しかし，等式(21)は任意の半径の円に対して成り立つから，明らかに，(21)の中のどの積分も実際はそれぞれの円の半径に依存しない．

コーシーの積分公式　u を点 o_2 に対応する複素数とし，関数

$$g(z) = (z-u)^n$$

について考察する．ただし，n は整数である．さて，ここで問題にするのは積分

$$h(u) = \int_{K_2} (\zeta - u)^n d\zeta$$

の計算である．円 K_2 を

$$z(t)=u+r_2e^{it}$$

とおいてパラメータ化する．t が 0 から 2π まで変化すると，点 $z(t)$ は K_2 全体の上を動く．さらに

$$z'(t)=ir_2e^{it}$$

である．したがって，20 節の定義式(*15*)によって

$$h(u)=\int_0^{2\pi}{r_2}^ne^{in\tau}ir_2e^{i\tau}d\tau=i{r_2}^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)\tau}d\tau$$

となる．$n+1\neq 0$ の場合，最後の積分の被積分関数の原始関数は $\dfrac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\tau}$ である．したがって，$n+1\neq 0$ のとき

$$\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)\tau}d\tau=\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\cdot 2\pi}-\frac{1}{i(n+1)}=0$$

ゆえに，$n\neq -1$ のとき

$$\int_{K_2}(\zeta-u)^nd\zeta=0 \qquad (24)$$

となる．一方，$n=-1$ のとき

$$h(u)=r_2^0i\int_0^{2\pi}d\tau=2\pi i$$

したがって

$$\int_{K_2}\frac{d\zeta}{\zeta-u}=2\pi i \qquad (25)$$

となる．

最後の等式の非常に重要な一般化が存在する．$f(z)$ を円 K_1 の内部全体で微分可能であるとしよう．

$$g(z)=\frac{f(z)}{z-u}$$

とおき，積分

$$h(u)=\int_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-u}d\zeta$$

を計算しよう．まず $g(z)$ を次のように表す．

$$g(z)=\frac{f(u)}{z-u}+\frac{f(z)-f(u)}{z-u}=\frac{f(u)}{z-u}+f'(u)+\gamma(z) \qquad (26)$$

ただし，$|\gamma(z)|<\gamma$ で，K_2 に属している z に対して $\lim_{r_2\to 0}\gamma=0$ である．(*26*)の左辺の関数の K_2 上の積分は r_2 に依存しないし，また同じように(*26*)の右辺の始めの2項の積分も r_2 に依存しないから，(*26*)の右辺の最後の項の積分も r_2 に依存しない．ところで

$$\left|\int_{K_2}\gamma(\zeta)d\zeta\right| \leqq \gamma\cdot 2\pi r_2$$

である．したがって

$$\lim_{r_2\to 0}\int_{K_2}\gamma(\zeta)d\zeta=0 \tag{27}$$

となる．ところが(*27*)の左辺の積分は r_2 に依存しないからこの積分は0に等しい．したがって

$$\int_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-u}\,d\zeta=f(u)\int_{K_2}\frac{d\zeta}{\zeta-u}+f'(u)\int_{K_2}d\zeta=2\pi i f(u)$$

が得られる（(*25*)参照)．

K で，u を中心とする，向きが時計の針の回転の向きと反対な円を表すと，この等式は改めて次のように書き表される．

$$\int_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-u}\,d\zeta=2\pi i f(u) \tag{28}$$

ただし，ここでは，円 K 上の点と K の内部の点はすべて開集合 G に含まれており，関数 $f(z)$ は G 上で微分可能であると仮定されている．等式(*28*)が**コーシーの積分公式**である．これは解析関数の理論で重要な役割を果たしている公式である．

例　ここで，コーシーの定理の一般化とそれのあまり術学的にならない証明を与えよう．開集合 G で微分可能な関数 $f(z)$ が与えられており，G の中に区分的に滑らかな，向きが時計の針の回転の向きと反対の閉経路 $K_j(j=0,1,\cdots,m)$ が与えられているとする．ただし，これらの閉経路は互いに交わらないし，自分自身とも交わらないとする．また，これらはどれも時計の針の回転の向きと反対の向きが付けられているとする．このような閉経路を単純閉曲線とよぶことにする．さらに，単純閉曲線

$$K_1,\ K_2,\ \cdots,\ K_m \tag{29}$$

はすべて単純閉曲線 K_0 の内部にあり，(*29*)のどの曲線もこれらの曲線のほかのものの内部にはないと仮定する．また R で，K_0 の内部に含まれ，(*29*)の

曲線の外側にある複素数平面上の部分を表す．さて，平面上の部分 R は開集合 G に含まれているとする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\int_{K_0} f(\zeta)d\zeta = \sum_{j=1}^{m}\int_{K_j} f(\zeta)d\zeta \tag{30}$$

これを証明するため，まず複素数平面全体を水平線と垂直線によって小さな長方形に分割する．長方形の大きさは十分小さくて，集合 R と交わる長方形はすべて完全に開集合 G に含まれていると仮定する．

$$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n$$

を集合 R と交わる長方形全体の集まりとする．長方形 C_k と集合 R の共通部分を B_k で表し，B_k の境界を A_k で表す．長方形 C_k が完全に集合 R に含まれるならば，A_k は長方形 C_k の境界である．長方形 C_k が集合 R に含まれないならば，A_k のいくつかの部分は長方形 C_k の境界に含まれている線分であり，また別のいくつかの部分は集合 R を囲んでいる曲線上の部分弧で，曲線 $K_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ の 1 つあるいはいくつかに含まれている．各 B_k の内部に点 a_k をとり，a_k と B_k の境界 A_k の各点を線分で結ぶ．明らかに，これらの線分はすべて開集合 G に含まれる．したがって，

$$\int_{A_k} f(\zeta)d\zeta = 0 \tag{31}$$

となる．ただし，この積分において，単純閉曲線 A_k には，時計の針の回転の向きと反対の向きが付けられていると仮定しておく．さて，長方形 C_k に含まれている境界 A_k の構成部分の線分はすべて同時にほかの長方形 C_l に含まれ，A_k と A_l の上で積分するとき，この線分に対応する経路の向きは反対になる．また，境界 A_k の曲線経路の部分はすべて曲線 $K_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ のどれか 1 つに含まれている．このとき，その部分が曲線 K_0 に含まれているならば向きは K_0 の向きと同じになる．一方，その部分が(29)の曲線の 1 つに含まれているならばこの曲線の向きと反対の向きになる．したがって，(31)を k について 1 から n まで加えると

$$\int_{K_0} f(\zeta)d\zeta + \sum_{j=1}^{m}\int_{-K_j} f(\zeta)d\zeta = 0$$

が得られ，これから等式(30)が得られる．

この証明は完璧なものではない．なぜなら，たとえば単純閉曲線は平面を内部と外部の 2 つの部分に分割するという命題を明らかに仮定しているからであ

る．しかし，この命題の証明は決して簡単なものではない．ただここでは明らかなこととしただけである．また，A_j は見ればわかるように示すことができるほど簡単なものであるとは限らない．たとえばそれは曲線経路の無限個の部分を含むかもしれないのである．

22．テイラー級数とローラン級数

ここではまず次のことを証明する．開集合 G 上で与えられた微分可能な関数 $f(z)$ は G の各点 z_0 でテイラー級数に展開することができる．すなわち $f(z)$ は次の形の級数で表すことができる（15 節参照）．

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots \tag{1}$$

しかもこの級数の収束半径 r は正である．また，収束半径 r の下からの評価を与えよう．すなわち次のことを示そう．

$$|z - z_0| < r'$$

を満たす点 z がすべて開集合 G に含まれるならば，収束半径 r は r' より小さくならない．つまり

$$r \geqq r'$$

である．

さらに，点 z_0 自身が開集合 G に属さないが，条件

$$0 < |z - z_0| < r', \quad r' > 0$$

を満たす点 z はすべて開集合 G に属する場合を考察する．この場合点 z_0 を関数 $f(z)$ の孤立特異点という．さて，関数 $f(z)$ は点 z_0 で定義されていなくてもよいが，z_0 を中心とする 1 つの円の内部の z_0 以外のすべての点で定義されているものとする．このとき，関数 $f(z)$ は**ローラン級数**とよばれている級数に展開される．すなわち，$f(z)$ は次の形の 2 つの関数の和に分解することができる．

$$f(z) = f_+(z) + f_-(z) \tag{2}$$

ただし，関数 $f_+(z)$ は（1）の形の $z - z_0$ のべき級数に展開され，関数 $f_-(z)$ は $z - z_0$ の負べきのべき級数，つまり次の形の級数に展開される．

$$f_-(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots \qquad (3)$$

しかもこの級数は

$$z \neq z_0 \qquad (4)$$

なる任意の z に対して収束する．

ここで，ローラン級数に展開できる関数の例を１つあげておく．それは

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \qquad (5)$$

である．実際

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n} + \cdots \qquad (6)$$

となる（８節，(４)参照)．関数(５)に対して，$f_+(z) = 1$ で，$f_-(z)$ は(６)の z の負べきの項からなる級数の和に等しい．

ところで，テイラー級数は点 z_0 が開集合 G に属しているときのローラン級数の特別の場合である．その場合，後でわかるように関数 $f_-(z)$ は恒等的に 0 になる．

さて，関数 $f(z)$ が $z - z_0$ のローラン級数に展開されることを証明するために，まず最初に，点 z_0 を中心とする円 K_1 をとる．ただし，K_1 とその内部の点はたかだか点 z_0 を除いてすべて開集合 G に含まれるものとする．また，w を，z_0 と異なる（$w \neq z_0$）K_1 の内部の点とする．最後に，２つの円，z_0 を中心とする円 K_2 と w を中心とする円 K_3 を互いに外部にあるように円 K_1 の内部にとる．つぎに

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - w}$$

とおく．この関数 $g(z)$ に 21 節の等式(21)を $z_0 = o_2$，$w = o_3$ と見なして適用しよう．計算の便宜上，21 節の等式(21)の中の３つの積分に対して次のような特別の記号を使うことにしよう．すなわち

$$h_m(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\, d\zeta, \quad m = 1,\ 2,\ 3$$

とおく．そうすると，21 節の等式(21)は

$$h_3(w) = h_1(w) - h_2(w) \qquad (7)$$

と書き換えることができる．さてつぎに，関数 $h_3(w)$，$h_1(w)$，$h_2(w)$ を順に計算しよう．まず，$h_3(w)$ はコーシーの積分公式（21 節，(28)参照）によっ

てただちに求まる．すなわちこの公式から

$$h_3(w) = f(w) \tag{8}$$

となる．今度は $h_1(w)$ を計算しよう．このために被積分関数の式を次のように変形する．

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - w} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (w - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{w - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(w - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \tag{9}$$

ここで式

$$\frac{1}{1 - \dfrac{w - z_0}{\zeta - z_0}}$$

を等比級数に展開した．この展開は

$$\left| \frac{w - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \rho < 1$$

であるから可能である．この不等式は点 ζ が円 K_1 上にあり，点 w がこの円の内部にあることから得られる．

等式(9)の右辺の級数は変数 ζ について一様収束するから（20節，例1参照），項別積分が可能である．したがって

$$h_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (w - z_0)^n \int_{K_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

となる．ゆえに

$$h_1(w) = a_0 + a_1(w - z_0) + \cdots + a_n(w - z_0)^n + \cdots \tag{10}$$

ただし

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \tag{11}$$

そこで

$$f_+(w) = h_1(w)$$

とおく．点 z_0 が開集合 G に属する場合は関数 $h_2(z)$ は恒等的に 0 になる．なぜなら，このとき積分の経路 K_2 はその内部とともに $f(z)$ の微分可能な点全点の集合に含まれているからである．したがってこの場合，等式

$$f(w) = h_1(w) = f_+(w)$$

が成り立つ（(7)，(8)参照）.

最後に，点 z_0 が開集合 G に属していない場合の $h_2(w)$ を計算しよう．今度は被積分関数を次のように変形する．

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-w} = -\frac{f(\zeta)}{(w-z_0)-(\zeta-z_0)} = -\frac{f(\zeta)}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{w-z_0}}$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(\zeta-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}} \tag{12}$$

ここで式

$$\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{w-z_0}}$$

の等比級数展開を用いた．なぜなら

$$\left|\frac{\zeta-z_0}{w-z_0}\right| = \sigma < 1$$

だからである．この不等式は点 ζ が円 K_2 上にあり，点 w はこの円の外部にあることから得られる．またこのことから等式(12)の右辺の級数は ζ について一様収束し，したがって項別積分ができる．ゆえに

$$-h_2(w) = \frac{a_{-1}}{w-z_0} + \frac{a_{-2}}{(w-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-k}}{(w-z_0)^k} + \cdots \tag{13}$$

ただし

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_2} f(\zeta)\cdot(\zeta-z_0)^{k-1}d\zeta \tag{14}$$

そこで今度は

$$f_-(w) = -h_2(w)$$

とおく．さて，点 z_0 が $f(z)$ の微分可能な点全体の集合である開集合 G に属していなくても，級数(13)の係数 a_{-1}，a_{-2}，…，a_{-k}，…はすべて 0 になることがある．この場合，$f_-(w)$ は恒等的に 0 に等しい．したがってこのとき

$$f(w) = f_+(w)$$

とならなければならない．さらにこのことから，与えられた関数 $f(z)$ の点 z_0 における値を改めて定義して，$f(z)$ が z_0 において解析的になるようにできる．

以上のようにして，関数 $f(z)$ は 2 つの関数の和

$$f(w) = f_+(w) + f_-(w)$$

に分解された．ここでは変数として文字 z ではなく w が使われているが，もちろん w を z に置き換えることができる．そうするとはじめに述べた結果((2)参照) が得られる．つぎに，関数 $f_{-}(w)$ に対して得られた級数(13)はすべての $w \neq z_0$ に対して収束することを指摘しておこう．まず級数のつくり方からわかるように，級数(13)は不等式

$$r_2 < |w - z_0| < r'$$

を満たすすべての w に対して収束する．ところがすでに注意しておいたように，係数 a_{-k} は円 K_2 の半径 r_2 には依存しない（21 節参照)．したがって，級数(13)の作成と収束性にとって，不等式

$$0 < |w - z_0| < r_1$$

が成り立てば十分である．

また，w が円 K_1 の外部にあるとき，級数(13)の収束性は(13)の項の絶対値がより小さくなることから得られる．したがって，級数(13)はすべての $w \neq z_0$ に対して収束する．これで条件(4)は級数(13)が収束するためには十分であることが証明された．

開集合 G に入っていない点 z_0 は関数 $f(z)$ の**孤立特異点**とよばれている．この特異点は 3 種類に分類されている．級数(3)が 0 でない項を無限個もつとき，z_0 を $f(z)$ の**真性特異点**という．つぎに級数(3)の 0 でない項が有限個のとき，z_0 を $f(z)$ の**極**という．最後に級数(3)の項がすべて 0 のとき，z_0 を $f(z)$ の**除去可能な特異点**という．なぜなら，この場合，$f(z)$ の z_0 における値として $f(z_0) = a_0$ とおくと，$f(z)$ の点 z_0 におけるテイラー級数展開が得られるからである．

以上で得られた結果をまとめると，関数 $f(z)$ の点 z_0 におけるローラン級数展開は次の形で書き表すことができる．

$$f(z) = \sum_n a_n (z - z_0)^n \tag{15}$$

ただし，n はすべての整数を，つまり正の整数も負の整数も値にとる．さて，次の問題は展開(15)の係数は関数 $f(z)$ 自体から定められるかということである．いいかえると，関数 $f(z)$ は点 z_0 で 2 つの違った方法で，つまり異なった係数をもつローラン級数に展開できないかということである．ここでそのようにはできないことを証明しよう．すなわち，展開(15)の係数 a_n は関数 $f(z)$

によって定められることを示そう．まず最初に，級数(*15*)は点 z_0 を中心とする r_1 を超えない正の半径をもつすべての円 K の上で一様収束することを指摘しておく．等式(*15*)に $(z-z_0)^{-(k+1)}$ を掛けよう．ただし，k は任意の整数である．このとき等式

$$f(z)(z-z_0)^{-(k+1)}=\sum_n a_n(z-z_0)^{n-(k+1)} \tag{16}$$

が得られる．(*15*)の右辺の級数は円 K 上で一様収束するから，(*16*)の級数も K 上で一様収束する．したがって(*16*)を K 上で積分するとき，右辺は項別積分することができる．積分の結果次の等式が得られる．

$$\int_K f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-(k+1)}d\zeta=\sum_n a_n\int_K(\zeta-z_0)^{n-(k+1)}d\zeta \tag{17}$$

21 節（(*24*)，(*25*)参照）で証明したように，$\int_K(\zeta-z_0)^{n-(k+1)}d\zeta\neq 0$ となるのは，$n-(k+1)=-1$ のときだけである．すなわちこの積分は $n=k$ のときだけ 0 にならない．したがって(*17*)から

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_K f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-(k+1)}d\zeta \tag{18}$$

が得られる．この公式は明らかに係数 a_k を関数 $f(z)$ によって表している．したがってこの公式によって，$f(z)$ の z_0 におけるローラン級数展開の(*3*)のすべての係数も関数 $f(z)$ 自身から一意的に定められるのである．さて，つぎにもう 1 つ一意性の問題を研究しよう．

例 1　連結開集合を領域という．連結性の定義を思い出しておこう．集合 G が連結であるというのは，G の任意の 2 点が G の中の折線で結ぶことができることである（12 節参照）．さて，G を領域とし，G 上に 2 つの解析関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ が与えられているとする．さらに領域 G に含まれる無限集合 M が存在して，M は G の 1 つの点 z_0 を集積点にもち，$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は M のすべての点において一致するものとする．このとき，$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は G 上で恒等的に等しい．これを証明しよう．

z^* を G の任意の点とし，$z=z(t)$ を z_0 と z^* を結ぶ G に完全に含まれる折線とする．したがって

$$z(t_0)=z_0,\quad z(t^*)=z^*,\quad t_0\leqq t\leqq t^* \tag{19}$$

となり，しかも点 $z(t)$ は G に属する．9 節で証明したように，$f_1(z)$ と $f_2(z)$

は M 上で一致しているから，$f_1(z)$ と $f_2(z)$ の z_0 におけるテイラー級数は一致する．このテイラー級数の収束半径 r は正であるから，点 $z(t_0)$ を始点とする折線(*19*)は中心 z_0，半径 r の円の内部を通り，しかもこの円の内部に含まれる折線の部分の上で

$$f_1(z(t)) = f_2(z(t)) \tag{20}$$

が成り立つ．さて，t_1 を，等式(*20*)が区間 $[t_0t]$ 上で成り立つような t 全体の集合の上限とする．変数 t の関数 $f_1(z(t))$ と $f_2(z(t))$ は連続であるから，点 t_1 において

$$f_1(z(t_1)) = f_2(z(t_1)) \tag{21}$$

が成り立つ．したがって，点 $z_1 = z(t_1)$ において $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は一致する．さらに，点 t_1 は(*20*)が $[t_0t]$ 上で成り立つ点 t 全体の集合の集積点であるから，点 z_1 は等式

$$f_1(z) = f_2(z)$$

を満たす点全体の集合の集積点である．このことから，$f_1(z)$ と $f(z_2)$ の z_1 におけるテイラー級数は一致する．このテイラー級数の収束半径を r_1 で表す．さていま，$t_1 \neq t^*$ と仮定すると，$t_1 < t \leqq t_2$ に対する折線(*19*)上の点がすべて中心 z_1 半径 r_1 の円の内部に含まれてしまうような t_2 が存在する．したがって，t_1 は(*20*)が $[t_0t]$ 上で成り立つような t 全体の集合の上限ではない．これで $t_1 = t^*$，したがって点 $z^* = z(t^*)$ において $f_1(z)$ と $f_2(z)$ が等しいことが証明された．ところが，点 z^* は G の任意の点であるから，$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は G のすべての点で等しい．

またいま証明したことからただちに次の命題が得られる．すなわち，関数 $f(z)$ が領域 G の無限部分集合 M のすべての点で 0 になるならば，この $f(z)$ は G のすべての点で 0 に等しい．

例 2　実変数の実数値関数の微分係数の定義と複素変数の複素数値関数の微分係数の定義は形式上は全く同じであり（10 節参照），このことからこれらに関することを同時に記述することは可能性としては考えられるが，これらの概念の実質的な内容は非常に違っている．実変数の実数値関数が微分可能，つまり各点で微分係数をもつという仮定は，関数に対して比較的弱い制約である．しかし，複素変数の複素数値関数が微分可能，つまり各点で微分係数をもつという仮定は，たいへん強い要求である．この違いの大きいことは，とくに次の

点からわかる．任意次数の高次微分係数をもつ実変数の実数値関数でもべき級数に展開できないことがある（15節，例2参照）．しかし，複素変数の複素数値関数は1次の微分係数をもつだけで各点でべき級数に展開することができる．この大きな違いの理由は次のことによって明らかになる．実変数 x の実数値関数 $f(x)$ の微分係数 $f'(x)$ を定義するとき，すなわち，$\xi \to x$ のときの比

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

を研究するとき，ξ を x にただ2つの方向から，つまり減小しながらあるいは増加しながら近づけることができるだけである．一方，複素変数 z の複素数値関数 $f(z)$ の微分係数 $f'(z)$ を定義する場合も，比

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \tag{22}$$

を研究し，$\zeta \to z$ のときのこの比の極限を求めるが，このとき，ζ を z に無限の方向から近づけることができる．なぜなら，ζ は直線上の点ではなく複素数平面上の点だからである．したがって，ζ を水平に動かしながら z に近づけることができるし，あるいはまた ζ を z に近づけることを，ζ の垂直方向の運動によって実現させることができる．しかも，この両方の場合に同じ1つの極限が得られなければならない．これは関数 $f(z)$ に非常に強い制約を課すことである．このことを十分理解するために，複素数 z を実部と虚部に分解し，$z = x + iy$ とおく．同じように関数 $f(z)$ を実部と虚部に分解し，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおく．さらに，

$$\zeta = \xi + i\eta$$

とおく．そこで(22)を次の形の式で書き表す．

$$\frac{u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta) - u(x, y) - iv(x, y)}{(\xi - x) + i(\eta - y)} \tag{23}$$

ここで，水平に $\zeta \to z$ とするならば，(23)の中で $\eta - y = 0$ となり，比(23)の $\zeta \to z$ のときの極限は

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \tag{24}$$

の形の式になる．

垂直に $\zeta \to z$ とするならば，(23)の中で $\xi - x = 0$ となり，(23)の極限は

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}+\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y} \tag{25}$$

の形の式になる．(24)と(25)は等しいから，次の2つの等式が得られる．

$$\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}$$

この等式は**コーシー-リーマンの条件**とよばれている．これから明らかに，複素変数の複素数値関数に課せられた微分係数をもつことという要求はどれほど大きいものであるかがわかる．

23. 留　　数

領域 G 上で与えられた解析関数 $f(z)$ について考える．前節ですでに述べたように，点 z_0 を中心とする円板が，中心 z_0 だけを除いて領域 G に含まれることがある．この場合，点 z_0 は関数 $f(z)$ の孤立特異点とよばれた．孤立特異点は3種類に分類された．すなわち真性特異点，極，除去可能な特異点である．除去可能な特異点の場合，$f(z)$ に対してこの点 z_0 における値 $f(z_0)$ を適当に定義して，$f(z)$ が z_0 において解析的になるようにできる．したがって，$f(z)$ の除去可能な特異点 z_0 は領域 G に含めておくのが自然である．また，ほかの2つの場合，z_0 が $f(z)$ の真性特異点または極の場合，z_0 は $f(z)$ を考察するときに対象となる点に含めることにする．したがって，$f(z)$ のすべての孤立特異点を領域 G に含めておくのが自然であり，このように拡大した集合もまた G で表す．この拡大した集合 G も連結開集合，つまり領域である．さて，解析関数 $f(z)$ は，実際には孤立特異点で定義されていないが，領域 G 上で与えられたといういい方をしよう．また，次のことを注意しておかなければならない．すなわち，$f(z)$ の孤立特異点全体の集合 M は無限集合になる可能性があるが，その場合でも M は領域 G の中に集積点をもつことはない．実際，G の任意の点 z_0 に対して，$f(z)$ は中心 z_0 のある円板において，たかだか z_0 自身を除いて微分可能である．したがってこの円板の内部において $f(z)$ は z_0 と異なる孤立特異点をもつことができない．ゆえに，z_0 は M の集積点になることができない．

極と非特異点の近くでの関数のふるまい　　$f(z)$ は領域 G で与えられた解

析関数とし，z_0 は G の点で $f(z)$ の真性特異点でない（極であってもよい）とする．このとき，点 z_0 を中心とする円の内部で関数 $f(z)$ は次の形の式で書き表すことができる．

$$f(z) = (z - z_0)^{\mu}\hat{f}(z) \tag{1}$$

ただし

$$\hat{f}(z) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1(z - z_0) + \cdots + \hat{a}_n(z - z_0)^n + \cdots \tag{2}$$

しかも，$\hat{a}_0 = \hat{f}(z_0) \neq 0$ である．

この命題を証明しよう．z_0 は $f(z)$ の真性特異点でないから，$f(z)$ は z_0 の近傍で次のように書き表すことができる．

$$f(z) = \sum_{n=\mu}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{3}$$

ただし，$a_\mu \neq 0$ である．したがって，$f(z)$ は次の形の式で書き表すことができる．

$$f(z) = (z - z_0)^{\mu}(a_\mu + a_{\mu+1}(z - z_0) + \cdots + a_{\mu+n}(z - z_0)^n + \cdots) \tag{4}$$

これで等式（1）が証明された．

ここで，μ が負の場合，点 z_0 は関数 $f(z)$ の位数 $-\mu$ の極であるという．また，μ が正の場合，点 z_0 は関数 $f(z)$ の位数 μ の零点であるという．

2 つの関数の比　$\hat{\varphi}(z)$ と $\hat{\psi}(z)$ を領域 G で与えられた 2 つの解析関数とし，z_0 をこれらの関数の非特異点とする．また

$$\hat{\varphi}(z) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1(z - z_0) + \cdots + \hat{a}_n(z - z_0)^n + \cdots \tag{5}$$

$$\hat{\psi}(z) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(z - z_0) + \cdots + \hat{\beta}_n(z - z_0)^n + \cdots \tag{6}$$

をこれらの関数の z_0 におけるテイラー級数展開とする．しかも

$$\hat{a}_0 = \hat{\varphi}(z_0) \neq 0, \quad \hat{\beta}_0 = \hat{\psi}(z_0) \neq 0 \tag{7}$$

とする．ρ を（5）の収束半径，σ を（6）の収束半径，σ' を z_0 と z_0 に最も近い $\hat{\psi}(z)$ の零点との距離とする．3 つの数 ρ，σ，σ' の最小値を σ'' で表す．このとき，$\hat{\chi}(z) = \dfrac{\hat{\varphi}(z)}{\hat{\psi}(z)}$ はテイラー級数

$$\frac{\hat{a}_0}{\hat{\beta}_0} + \hat{\gamma}_1(z - z_0) + \cdots + \hat{\gamma}_n(z - z_0)^n + \cdots \tag{8}$$

に展開される．しかもこの級数の収束半径 r は σ'' より小さくない．

この命題を証明しよう．$\widehat{\varphi}(z)/\widehat{\psi}(z)$ は条件 $|z-z_0|<\sigma''$ を満たすすべての点 z において微分係数をもつ（11節，(*17*)参照）．したがってこの関数は条件 $|z-z_0|<\sigma''$ で定められる領域上の解析関数である．前節の結果によって，この関数は z_0 においてテイラー級数に展開され，その級数の収束半径は σ'' より小さくない．テイラー級数(*8*)の初項 $\widehat{\chi}(z_0)$ は明らかに

$$\frac{\widehat{\varphi}(z_0)}{\widehat{\psi}(z_0)}=\frac{\widehat{\alpha}_0}{\widehat{\beta}_0}\neq 0 \tag{9}$$

に等しい．これでいまの命題が証明された．

さて今度は，$\varphi(z)$ と $\psi(z)$ を点 z_0 の近傍において次の式で与えられる 2 つの関数とする（(*4*)参照）．

$$\varphi(z)=(z-z_0)^p\widehat{\varphi}(z),\quad \psi(z)=(z-z_0)^q\widehat{\psi}(z)$$

ただし，$\widehat{\varphi}(z)$ と $\widehat{\psi}(z)$ は $(z-z_0)$ に関するテイラー級数に展開されるものとし，さらに

$$\widehat{\varphi}(z_0)\neq 0,\quad \widehat{\psi}(z_0)\neq 0$$

とする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\chi(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=(z-z_0)^{p-q}\widehat{\chi}(z) \tag{10}$$

ただし，$\widehat{\chi}(z)$ は点 z_0 においてテイラー級数に展開され，

$$\widehat{\chi}(z_0)=\frac{\widehat{\varphi}(z_0)}{\widehat{\psi}(z_0)}\neq 0 \tag{11}$$

である．この命題は(*8*)と(*9*)からただちに得られる．

留数　$f(z)$ は領域 G で与えられた解析関数とし，z_0 はこの領域の点とする．

$$v(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_K f(\zeta)d\zeta \tag{12}$$

とおく．ただし，K は z_0 を中心とする円で，その半径は(*12*)の右辺の積分が半径に依存しないほど小さいものとする．$v(z_0)$ を関数 $f(z)$ の点 z_0 における**留数**という．さて，z_0 が $f(z)$ の特異点でないならば，$f(z)$ の z_0 における留数 $v(z_0)$ は明らかに 0 である（21節，(*20*)参照）．また，z_0 が $f(z)$ の特異点ならば，$v(z_0)$ は次の式で定められる．

$$v(z_0)=a_{-1}$$

ただし，a_{-1} はローラン級数の $(z-z_0)^{-1}$ の係数である（22節，(*14*)参照）．

K_0 は単純閉曲線で，その上の点もその内部の点もすべて領域 G に属するものとする．このとき，この曲線の内部と曲線自身の上に特異点が存在したとしてもその個数は有限個である．なぜなら，特異点全体の集合の集積点は G に属することができないからである．さらに，K_0 自身の上に $f(z)$ の特異点が存在しないと仮定する．z_1，z_2，…，z_m で，K_0 の内部にある $f(z)$ のすべての特異点を表す．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_0} f(\zeta)d\zeta = v(z_1) + v(z_2) + \cdots + v(z_m) \tag{13}$$

この命題を証明するために，各点 z_j を十分小さい半径の円 K_j で囲む．そうすると，21 節の等式(*30*)によって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_0} f(\zeta)d\zeta = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_j} f(\zeta)d\zeta = \sum_{j=1}^{m} v(z_j)$$

が成り立つ．

これで等式(*13*)が証明された．

対数的留数　　$f(z)$ は領域 G で与えられた関数とする．関数

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

を関数 $f(z)$ の**対数微分係数**という．実際

$$g(z) = \frac{d}{dz}\log f(z)$$

となる．

しかし，この最後の式はここでは全然必要がない．ただ関数 $g(z)$ の呼び名の由来を説明するのに示しただけである．

さて，z_0 は領域 G の任意の点で，関数 $f(z)$ の真性特異点でないとする．そうすると点 z_0 の近傍で $f(z)$ は(*1*)の形の式で書き表される．さらに

$$f'(z) = \mu\hat{a}_0(z - z_0)^{\mu-1} + (\mu + 1)\hat{a}_1(z - z_0)^{\mu} + \cdots$$
$$+ (\mu + n)\hat{a}_n(z - z_0)^{\mu+n-1} + \cdots$$

となる．したがって

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \mu(z - z_0)^{-1} + \gamma(z) \tag{14}$$

となる（(*10*)参照）．ただし，$\gamma(z)$ は $(z - z_0)$ の非負べきのべき級数で，その収束半径は正である．このとき，$f(z)$ の対数微分係数 $g(z)$ の留数（$f(z)$ の

対数的留数）$v(z_0)$ は式 $\frac{1}{2\pi i}\int_K g(\zeta)d\zeta=\mu$ によって定義される．

今度は，K_0 は領域 G に含まれる単純閉曲線で，関数 $f(z)$ は G 上で与えられているとする．K_0 の内部の点はすべて G に属し，K_0 上にも K_0 の内部にも $f(z)$ の真性特異点は存在しないと仮定する．さらに，K_0 上に $f(z)$ の零点も極も存在しないとする．さて，z_1，z_2，…，z_p を K_0 の内部にある $f(z)$ のすべての零点とし，z_j の位数を μ_j とする．さらに，z_1^*，z_2^*，…，z_q^* を K_0 の内部にある $f(z)$ のすべての極とし，z_k^* の位数を ν_k とする．$h(z)$ は G 上の解析関数で，$h(z)$ は G の中に特異点をもたない，つまり極も真性特異点ももたないとする．このとき，次のたいへん重要な等式が成り立つ．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_0}h(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=\sum_{j=1}^{p}\mu_j h(z_j)-\sum_{k=1}^{q}\nu_k h(z_k^*) \tag{15}$$

さて，K_j で点 z_j を中心とする半径の小さい円を表し，L_k で点 z_k^* を中心とする半径の小さい円を表す．このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_j}h(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_j}h(\zeta)\frac{\mu_j}{\zeta-z_j}d\zeta=\mu_j h(z_j)$$

となる（(*14*)と 21 節，(*28*)参照）．全く同じようにして

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}h(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}h(\zeta)\frac{(-\nu_k)}{\zeta-z_k^*}d\zeta=-\nu_k h(z_k^*)$$

となる（(*14*)と 21 節，(*28*)参照）．21 節の(*30*)から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_0}h(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=\sum_{j=1}^{p}\mu_j h(z_j)-\sum_{k=1}^{q}\nu_k h(z_k^*)$$

が得られる．

特別の場合として $h(z)=1$ とすると，次の重要な等式が得られる．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_0}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=\mu-\nu \tag{16}$$

ただし，μ は $f(z)$ の位数を含めての零点の総数で，ν は $f(z)$ の位数を含めての極の総数である．

いま 1 つの重要な場合として $h(z)=z$ とおくと，次の等式が成り立つ．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_0}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=\sum_{j=1}^{p}\mu_j z_j-\sum_{k=1}^{q}\nu_k z_k^* \tag{17}$$

例　対数的留数を用いて代数学の基本定理を証明しよう．すなわち，多項式 $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ は位数を含めてちょうど n 個の零点をもつ

ことを証明しよう．このために対数微分係数

$$g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{nz^{n-1}+(n-1)a_1z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n} \tag{18}$$

をつくり

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K g(\zeta)d\zeta=n$$

を証明する．ただし，K は $z=0$ を中心とする十分大きな半径 r の円である．

上の等式の左辺は半径 r が大きい円 K 上の積分であるから，

$$z=1/u \tag{19}$$

とおいて z を変換しよう．このとき，z が大きいと u は逆数であるから小さくなる．(*18*)の式において変換(*19*)を行い，分子と分母に u^n を掛ける．そうすると

$$g\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{nu+u\varphi(u)}{1+\psi(u)} \tag{20}$$

となる．ただし，$\varphi(u)$ と $\psi(u)$ は u で割り切れる u の多項式である（すなわち，定数項のない有限級数である）．このとき，$g(1/u)$ は正の収束半径 ρ をもつ次の形の u のべき級数に展開される．

$$g(1/u)=nu+\gamma_1u^2+\cdots+\gamma_nu^{n+1}+\cdots \tag{21}$$

ここで u に $1/z$ を代入すると(*20*)と(*21*)から

$$g(z)=\frac{n}{z}+\frac{\gamma_1}{z^2}+\cdots+\frac{\gamma_n}{z^{n+1}}+\cdots$$

が得られる．この z の負べきの級数は $|z|=r>\dfrac{1}{\rho}$ において一様収束する．したがって半径 r の円 K 上で項別積分できる．その結果

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta=n$$

が得られる．

多項式 $f(z)$ は極をもたないから，この等式は円 K の内部に $f(z)$ のちょうど n 個の零点が存在していることを示している．

24. 逆関数

23節で得られた結果を使って逆関数（11節参照）を求めてみよう．

次の方程式を考察しよう．

$$\psi(w) = z \tag{1}$$

ただし，$\psi(w)$ は，$w = w_0$ においてテイラー級数，つまり $w - w_0$ の非負べきのべき級数に展開される解析関数で，しかも $\psi(w_0) = z_0$，$\psi'(w_0) \neq 0$ を満たすものとする．方程式(1)において，w を未知数，z を既知数と見なすことにする．このとき，次のことを証明しよう．方程式(1)は解 $w = \varphi(z)$，$\varphi(z_0) = w_0$ をもち，しかも $\varphi(z)$ は変数 z の解析関数で，$z = z_0$ においてテイラー級数，つまり $z - z_0$ の非負べきのべき級数に展開される．

これを証明するために，w-複素数平面上に，十分小さい半径の円 K をとって，方程式 $\psi(w) - \psi(w_0) = 0$ のこの円の内部における解は位数1の解 w_0 ただ1つとなるように（9節参照），さらに，$\psi(w) - \psi(w_0)$ はこの円上で0にならないようにする．したがって，K 上の点 w に対して

$$|\psi(w) - \psi(w_0)| > \delta > 0 \tag{2}$$

となる．また，23節の(16)から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\psi'(\omega)}{\psi(\omega) - \psi(w_0)}\,d\omega = 1 \tag{3}$$

となる．さらに，23節の(17)から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\omega\psi'(\omega)}{\psi(\omega) - \psi(w_0)}\,d\omega = w_0 \tag{4}$$

となる．つぎに，$|z - z_0|$ が十分小さいとき，関数

$$\psi(w) - z = (\psi(w) - \psi(w_0)) - (z - z_0) \tag{5}$$

の K の内部における零点 $\varphi(z)$ を求めよう．23節の(16)によって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\psi'(\omega)}{\psi(\omega) - z}\,d\omega$$

の値は整数である．また，$z = z_0$ のときこの値は1である（(3)参照）から，連続性を考慮することによって，$z - z_0$ が十分小さいときもこの値は1に等しい．したがって，方程式(1)は $|z - z_0|$ が十分小さいとき，K の内部に解

をただ1つもつ．23節の(*17*)によって，$\psi(w)-z$ の零点を $\varphi(z)$ で表すと，これは

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{\omega\psi'(\omega)}{(\psi(\omega)-\psi(w_0))-(z-z_0)}\,d\omega \tag{6}$$

で与えられる（(*5*)参照)．

等式(*6*)の右辺の被積分関数は次の形に書くことができる．

$$\begin{aligned}&\frac{\omega\psi'(\omega)}{(\psi(\omega)-\psi(w_0))-(z-z_0)}\\&\qquad=\frac{\omega\psi'(\omega)}{(\psi(\omega)-\psi(w_0))\left(1-\dfrac{z-z_0}{\psi(\omega)-\psi(w_0)}\right)}\\&\qquad=\sum_{n=0}^{\infty}\omega\psi'(\omega)\frac{(z-z_0)^n}{(\psi(\omega)-\psi(w_0))^{n+1}}\end{aligned} \tag{7}$$

ここで関数

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\psi(\omega)-\psi(w_0)}}$$

は，$|z-z_0|<\delta$ でしかも ω が K 上にあるとき（(*2*)参照)，等比級数に展開される．級数(*7*)は K 上で一様収束するから，K 上で項別積分できる．したがって

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{\omega\psi'(\omega)}{(\psi(\omega)-\psi(w_0))^{n+1}}\,d\omega \tag{8}$$

が得られる．

この $z-z_0$ の非負べきのべき級数は $|z-z_0|<\delta$ のとき収束する．また，この級数の定数項は(*4*)から w_0 に等しいことを指摘しておかなければならない．このようにして，方程式(*1*)の解は $z-z_0$ の非負べきのべき級数の形で求められた．さて，点 w_0 においてテイラー級数で与えられる関数 $\psi(w)$ は，実際は w-複素数平面上の領域 H 上で定義されており，点 z_0 で(*8*)のべき級数展開として与えられる関数 $\varphi(z)$ は，実際は z-複素数平面上の領域 G 上で定義されており，しかも G のすべての点 z に対して $\varphi(z)$ は H に属すると仮定する．今度は関数 $\psi(\varphi(z))$ を考察しよう．この関数は G 上のすべての点で解析的である．なぜなら，これらすべての点で微分係数をもつからである．また，z_0 に近いすべての z に対して，恒等式

$$\psi(\varphi(z)) = z \tag{9}$$

が成り立つ．ところが，この等式の左辺も右辺も G 上の解析関数であるから，この両方の関数の定義域である領域 G のすべての点 z でこれら 2 つの関数は恒等的に等しい（22 節参照）．したがって，G のすべての点 z に対して恒等式

$$\psi(\varphi(z)) \equiv z \tag{10}$$

が成り立つ．

例 1 方程式

$$e^{w} = 1 + z \tag{11}$$

の解 $w = \varphi(z)$ は定義によって $1 + z$ の自然対数，すなわち $\varphi(z) = \log(1 + z)$ である．恒等式

$$e^{\varphi(z)} = 1 + z \tag{12}$$

を微分することによって，$\varphi'(z)e^{\varphi(z)} = 1$ が得られる．この等式の中の $e^{\varphi(z)}$ を *(12)* で置き換えるとただちに

$$\varphi'(z) = 1/(1 + z)$$

が得られる．この等式の右辺をべき級数に展開すると，つまり等比級数で表すと

$$\varphi'(z) = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots \tag{13}$$

が得られる．この等式を積分し，$\varphi(0) = 0$ に注意すると

$$\varphi(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n + 1} + \cdots \tag{14}$$

が得られる．$\varphi(z)$ に対するこの級数の収束半径は 1 である．一見すると $\log(1 + z)$ のべき級数展開 *(14)* が得られたように思われる．しかし実際はそうではない．ここでは $\varphi(z)$ が方程式 *(12)* の解であるという仮定に基づいていた．しかしこの仮定は，方程式 *(12)* を満たす関数 $\varphi(z)$ が存在するかどうか一般に不明であるという意味であまり根拠がない．ただ $\varphi(z)$ が方程式 *(12)* を満たすならば，$\varphi(z)$ は *(14)* の級数に展開されるということが証明されただけである．そうすると，*(12)* において $\varphi(z)$ の代わりに級数 *(14)* を代入したとき，恒等式が得られることを証明することが残された課題になる．しかしこれは容易なことでない．

つぎは別のことであるが容易に示される．$\log(1 + z)$ を級数 *(14)* で定義することにすると，ただちに得られるように，$(\log(1 + z))'$ は級数 *(13)* で与え

られ，したがって，$(\log(1+z))' = 1/(1+z)$ となる．したがってまた容易に証明されるように，$(\log u)' = 1/u$ となる．これから容易に $\log e^w = w$ が得られる．実際，$u = e^w$ として $\log u$ の微分係数を求めよう．

$$\frac{d}{dw}\log u = (\log u)'\frac{du}{dw} = \frac{1}{u}\frac{d}{dw}e^w = \frac{1}{u}u = 1$$

したがって

$$\frac{d}{dw}\log e^w = 1$$

これから $\log e^w = w + c$ が得られる．

この等式で $w = 0$ とおくと $c = 0$ が得られる．したがって，$\log(1+z)$ を(*14*)で定義するという仮定に基づくと

$$\log e^w = w$$

が得られる．しかしこのことから(*14*)で与えられる関数 $\varphi(z)$ が方程式(*12*)を満たすことは示せない．なぜなら，一般にこの方程式の解が存在しているかどうか不明だからである．この欠陥はこの節の結果によって補われる．

w に関する方程式(*11*)の $w = \varphi(z)$ の形の解の存在は，この節で証明された方程式(*1*)の可解性から得られる．実際，$\psi(w) = e^w - 1$ とおこう．そうすると方程式(*11*)は

$$\psi(w) = z \tag{15}$$

の形に書き改められる．しかも $\psi(0) = 0$，$\psi'(0) = 1$ である．この方程式の解((*8*)参照) $w = \varphi(z)$ は z の値が小さいとき次の形の級数で書き表される．

$$\varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{16}$$

この(*16*)で与えられた関数は z の小さい値に対して $e^{\varphi(z)} = 1 + z$ を満たすから，前に証明したことによってこの関数は z の小さい値に対して(*14*)の級数で展開される．したがって(*16*)の係数は(*14*)の係数と等しい．ゆえに，(*16*)で与えられた関数 $\varphi(z)$ は $|z| < 1$ 全体で定まる．$\psi(w)$ を定める級数はすべての w に対して収束するから，(*15*)において w を(*14*)で定義される関数で置き換えるならば，恒等式 $\psi(\varphi(z)) = z$ が得られる（(*10*)参照）．このようにして，級数(*14*)は実際に $|z| < 1$ のとき関数 $\log(1+z)$ を与えることが証明された．

例 2　　方程式 $\sin w = z$ の解 $w = \varphi(z)$ として定義される関数 $\arcsin z$ に

ついての事情も全く同じである．方程式

$$\sin \varphi(z) = z \tag{17}$$

を満たす関数 $\varphi(z)$ が存在するという仮定に基づくと，容易に

$$\varphi'(z) = 1/\sqrt{1-z^2}$$

が証明される（11節，(*15*)参照）．これから容易に $\varphi(z)$ の収束半径が1の z のべき級数展開が得られる（15節，(*26*)参照）．しかし方程式(*17*)を満たす関数 $\varphi(z)$ が実際に存在することを証明するためには，この節の結果を使わなければならない．その後で対数関数に対して行ったと全く同じようにして15節の級数(*26*)で与えられた関数 $\varphi(z)$ が実際に $|z|<1$ に対して恒等式

$$\sin \varphi(z) = z \tag{18}$$

を満たすことが証明される．

同時に，関数 $\log u$ の場合と同じようにして，$\varphi(z)$ に対して恒等式 $\varphi(\sin w) = w$ が成り立つことも容易に証明される．しかもこれは実際に恒等式(*18*)と同値であることが証明される．しかし，この恒等式の同値性の簡単な証明は知らない．

25．整関数と特異点

関数 $f(z)$ は領域 G で定義され，G のすべての点で微分できるとする．G が複素数平面全体と一致するとき，$f(z)$ は**整関数**であるという．22節の結果によって，整関数は複素数平面上のすべての点 z_0 において収束半径が無限大のテイラー級数に展開される．とくにこのことは $z=0$ において成り立つ．したがって整関数は次の形の級数で表される．

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{1}$$

ただし，級数(*1*)は z のすべての値に対して収束する．級数(*1*)の項が有限個の場合，$f(z)$ は多項式である．また，もっと複雑な整関数の例もすでにあげてある．それは e^z，$\sin z$，$\cos z$ である．

有界な整関数　まず最初に次の命題を証明しよう．整関数 $f(z)$ は複素数平面全体の上で有界，すなわち $f(z)$ に対して不等式 $|f(z)| < c$ が成り立つとする．ただし，c は正の定数で，z は任意の点である．このとき，$f(z)$ は定数

である．

$$f(z) = c_1 \tag{2}$$

証明のために，22 節の(*18*)を使う．すなわち

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_K f(\zeta)\zeta^{-(n+1)}d\zeta$$

ただし K は半径 r の円である．このとき

$$|f(\zeta)\zeta^{-(n+1)}| < \frac{C}{r^{n+1}}$$

となり，20 節の評価(*22*)によって

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_K f(\zeta)\zeta^{-(n+1)}d\zeta\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{1}{r^n} \tag{3}$$

が得られる．a_n は r に無関係であるから，$n \geqq 1$ に対して，不等式(*3*)の右辺は $r \to \infty$ のとき 0 に収束する．したがって，$n \geqq 1$ に対して $a_n = 0$ となる．ゆえに $f(z) = a_0$ である（(*2*)参照)．

$z \to \infty$ のときの多項式のふるまい　級数(*1*)の項が有限個であるならば，すなわち $f(z)$ が多項式であるならば

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

となる．ただし，$a_n \neq 0$ である．いま $n > 0$ とする．このとき

$$f(z) = z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right)$$

となる．この等式から明らかに $z \to \infty$ のとき $f(z) \to \infty$ となる．あるいは式で表すと

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$$

となる．

多項式でない整関数の場合　級数(*1*)の項が無限個の場合，すなわち $f(z)$ が多項式でない場合，$f(z)$ は次の特筆すべき性質をもつ．すなわち，任意の複素数 a に対して，限りなく大きくなる変数 z の値の無限列，つまり条件

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty \tag{4}$$

を満たす点列

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots$$

が存在して，等式

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a \tag{5}$$

が成り立つ．

この命題の証明は矛盾を導く背理法で行う．まず結論の否定は次のように述べることができる．十分小さい正の数 ε と十分大きい正の数 ρ が存在して

$$|z| > \rho \quad \text{のとき} \quad |f(z) - a| > \varepsilon \tag{6}$$

が成り立つ．さて，関数 $g(z) = 1/(f(z) - a)$ を考察しよう．条件(6)から $|z| > \rho$ のとき $|g(z)| < 1/\varepsilon$ が成り立つ．すなわち $g(z)$ は半径 ρ の円の外部で有界である．一方，半径 ρ の円の内部に $g(z)$ は極をもつこと，すなわち $f(z) - a$ の零点を極にもつことがある．半径 ρ の円板は有界であるから，その円板の中にある $f(z) - a$ の零点の個数はたかだか有限個である．それらを α_1, α_2, …, α_m で表す．点 α_j は $g(z)$ の極であるから，$g(z)$ の α_j におけるローラン級数展開は $z - \alpha_j$ の負べきの項をもつ．それらの項全部の和を $\varphi_j(z)$ で表す．$\varphi_j(z)$ は $1/(z - \alpha_j)$ の多項式である．したがって z が限りなく大きくなると $\varphi_j(z) \to 0$ となる．さて

$$h(z) = g(z) - \varphi_1(z) - \varphi_2(z) - \cdots - \varphi_m(z)$$

とおく．$h(z)$ は半径 ρ の円板の中に極をもたないし，その円板上で有界である．同時に $h(z)$ は半径 ρ の円板の外部でも有界である．したがって，$h(z)$ は整関数でしかも複素数平面全体の上で有界である．したがって $h(z)$ は定数である（(2)参照）．ゆえに

$$\frac{1}{f(z) - a} - \varphi_1(z) - \varphi_2(z) - \cdots - \varphi_m(z) = c_1$$

これから

$$f(z) = \psi(z)$$

が得られる．ただし，$\psi(z)$ は有理関数，すなわち2つの z の多項式の比である．$f(z)$ は極をもたないから，$f(z)$ に等しい $\psi(z)$ は実際は単なる多項式である．これは矛盾である．なぜなら，$f(z)$ は多項式でないと仮定していたからである．これでいまの命題（(5)参照）が証明された．

以上の考察で $a = \infty$ の場合が抜けている．この空白を埋めよう．$a = \infty$ の場合の命題(5)の否定は，$f(z)$ は平面全体の上で有界であることを意味し，したがって $f(z)$ は定数になる．このようにして再び矛盾に導かれる．

孤立特異点の近くにおける関数のふるまい　$F(z)$ は孤立特異点 z_0 をもっているとする．そのとき22節の結果によって $F(z)$ は次の形で表される．

$$F(z) = F_+(z) + F_-(z) \tag{7}$$

ここでは $F(z)$ の(7)の和への分解は22節の場合と少し違ったものにする．すなわち，$z - z_0$ のべきの係数に入らない定数項 a_0 を $F_-(z)$ に入れる．したがって $F_+(z)$ は $z - z_0$ の正べきのべき級数に展開され，

$$F_+(z_0) = 0 \tag{8}$$

となる．22節で証明されたように，級数

$$F_-(z) = a_0 + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \cdots + a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \cdots$$

はすべての $z \neq z_0$ に対して収束する．したがって，関数

$$f(u) = a_0 + a_{-1}u + \cdots + a_{-n}u^n + \cdots$$

は整関数である．点 z_0 が $F(z)$ の極であるならば，$f(u)$ は多項式である．点 z_0 が $F(z)$ の真性特異点であるならば，$f(u)$ は u の無限べき級数である．さて，a を任意の複素数とする．前に証明した結果（(4)と(5)参照）によって，$f(u)$ の変数 u の値の点列

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

を選んで

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \infty \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = a \tag{10}$$

となるようにできる．

ここで，$z_n = z_0 + \dfrac{1}{u_n}$ とおく．このとき条件(9)から $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ となり，(10)から $\lim\limits_{n\to\infty} F_-(z_n) = a$ となる．$F_+(z_0) = 0$（(8)参照）であるから，$F(z)$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty} F(z_n) = a$ が得られる．これは z_0 が $F(z)$ の真性特異点の場合に成り立つ．z_0 が極の場合は $\lim\limits_{z_n\to z_0} F(z_n) = \infty$ となる．したがって，$F(z)$ の孤立特異点 z_0 の近くにおける $F(z)$ のふるまいは極の場合と真性特異点の場合では完全に異なる．

訳者あとがき

この本は，世界的に著名なロシアの数学者，ポントリャーギン（1908-1988）によって著された4巻からなるシリーズ『高等数学の知識』の第2巻『無限小解析（АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ)』(1980年刊）の邦訳である．

このシリーズは，高等数学の基礎的な知識を普及することを目的にして書かれたもので，第1巻は『座標の方法（МЕТОД КООРДИНАТ)』，第2巻はこの本の原書で，第3巻は『代数（АЛГЕБРА)』，第4巻は『微分方程式とその応用（ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ)』である．これらのうち，第2巻以外の各巻は，それぞれ，『座標・線・面—解析幾何と複素数—』，『代数—線形代数と多項式—』，『常微分方程式とその応用—工学への応用—』の書名で，シリーズ『ポントリャーギン数学入門双書』の第1巻，第3巻，第4巻として邦訳が刊行されている．

第2巻『無限小解析』では，級数，微分，積分など数学解析の基礎的な事項について述べられている．しかもその際，実変数の場合と複素変数の場合を別々に分けて取り扱うのではなく，可能ならば同時に考察されている．なかでも，級数の収束性，微分係数，原始関数，原始関数に基づく定積分といった数学解析の基本概念が，実変数と複素変数の場合について同時に導入され，これらに関する基本事項が要領よく述べられている．このように実変数と複素変数の場合を統合する形で議論を進めることによって，ふつう複素関数論で扱われているコーシーの定理，コーシーの積分公式，ローラン級数，留数など解析関数論の基礎部分が数学解析の基本事項として自然な形で位置づけられ，述べられている．原書第2巻『無限小解析』のこのような特徴を踏まえて，邦訳の書名を，原書の書名に副題を付け『無限小解析—複素変数からの新しいアプローチ—』としたのである．

この本では，特別な予備知識を必要としないように，数学解析で使われる等比級数の和の公式や2項定理など初等数学の公式や定理についてもきちんと証明が書かれており，高校の上級生にも十分理解できるように丁寧に書かれている．しかし，議論は数学的論理的に厳密に展開され，数学解析の根本概念である極限の概念についても，単に直観的に説明するというのではなく，実数論か

ら入って，いわゆる ε-δ 論法を用いて本格的に精確に述べられている．しかも，この本は，数学のテキストの標準的なスタイル，つまり定義，定理，証明というスタイルではなく，いわば“物語り”のスタイルで書かれており，使われている用語や記号の意味，定理の前提条件などを正確に読みとるには細心の注意が必要である．したがって，この本を読んで，数学解析の基礎的ないろいろの概念，定理，公式，技法をきちんと理解し，数学解析の本質を把握するには，それなりの数学的力量と努力が必要なことは明らかである．

このように，この本は，実質的には数学解析の理論の基礎を，複素変数の場合を視野に入れて数学的に厳密に述べた本であり，手軽に読めるやさしい本ではない．しかし，特別な予備知識を仮定せず，論理的にしかも丁寧に書かれているので，初学者にとっても，伝統的なやり方で微分積分学の基礎を学んだ者にとっても，実変数と複素変数を統合した数学解析の基礎を学ぶには，この本はたいへんユニークで他に例をみない良書であると思われる．

ところで，“微積分”の教育をどのようにするのがよいか，これは高校レベルでも大学レベルでも数学教育の１つの大きな問題である．微積分教育の現状では，数学解析は，ふつう実変数の微分積分学として，実変数の場合についてだけ教えられ，複素変数の場合は扱われていないのが実態でなかろうかと思われる．しかし，数学の理論と応用における複素変数の役割が非常に大きいことを見れば，複素変数の場合を含めた数学解析の教育はたいへん重要になる．数学解析の基礎を実変数と複素変数の場合を統合して述べているこの本は，今後の微積分教育の問題を考えるうえで，１つのモデルになると思われる．

この本の原書のところどころに明白な誤記がみられ，また，いくつかの命題について証明の中の一部分に小さな誤りや不適切と思われる箇所があった．訳出するにあたって，訳者の責任で，これらの誤りは訂正し，不適切な箇所は修正しておいた．

おわりに，この本を出版するにあたり，翻訳をお勧め下さった宮本敏雄先生と，出版の実務でたいへんお世話になった森北出版の星野定男さんに心から感謝の意を表します．この本が出版できたのは，宮本先生と星野さんの励ましがあったからこそです．重ねてあつくお礼を申し上げます．

1999年3月

訳　者

索　　引

た　行

な　行

は　行

ま　行

訳　者　紹　介

清原　岑夫（きよはら・みねお）

1954 年　金沢大学理学部数学科卒業

1959 年　東京都立大学大学院理学研究科博士課程退学

東京都立大学理学部を経て，1997 年金沢大学工学部教授を停年退職

現在　金沢大学非常勤講師

主な著訳書

『極限と連続』（現代数学社）

『リース・ナジー関数解析学（上），（下）』（共訳，共立出版）

無限小解析〈複素変数からの新しいアプローチ〉　　版権取得　*1989*

1999 年　5　月　28　日　　第 1 版第 1 刷発行

訳　　者　清原岑夫

発 行 者　森北　肇

発 行 所　森北出版株式会社

東京都千代田区富士見 1-4-11（〒 102-0071）

電話 03-3265-8341/FAX 03-3264-8709

http://www.morikita.co.jp/

自然科学書協会・工学書協会　会員

R＜日本複写権センター委託出版物・特別扱い＞

落丁・乱丁本はお取り替え致します　　印刷/壮光舎・製本/宏進社

Printed in Japan/ISBN 4-627-04221-3